Πανεπ. Κρητης, Τμ. Μαθηματικων, Θ. Προσεγγισης και Εφαρμογες, Ανοιξη 2010-11, Μιχ. Κολουντζακης

1ο φυλλάδιο ασκήσεων

Πρόβλημα 1. Δείξτε ότι η ανισότητα Hölder ισχύει και για άπειρες σειρές: αν $1 < p, q < \infty$, $1/p+1/q = 1$, τότε

$$\sum_{j=1}^{n} |z_j w_j| \le \left(\sum_{j=1}^{n} |z_j|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} |w_j|^q\right)^{1/q}.$$

Τι συμβαίνει όταν κάποια από τις σειρές που εμφανίζεται δε συγκλίνει;

Πρόβλημα 2. Αν $z \in \mathbb{C}^n$ δείξτε τις παρακάτω σχέσεις ανάμεσα σε διαφορετικές νόρμες:

$$\|z\|_1 \le \sqrt{n}\|z\|_2, \tag{1}$$

$$\|z\|_2 \le \|z\|_1, \tag{2}$$

$$\|z\|_1 \le n\|z\|_\infty, \tag{3}$$

$$\|z\|_\infty \le \|z\|_1, \tag{4}$$

$$\|z\|_\infty \le \|z\|_2, \tag{5}$$

$$\|z\|_2 \le \sqrt{n}\|z\|_\infty. \tag{6}$$

Πρόβλημα 3. Αν $f \in C([a, b])$ δείξτε τις παρακάτω ανισότητες:

$$\|f\|_1 \le (b-a)\|f\|_\infty, \tag{7}$$

$$\|f\|_1 \le \sqrt{b-a}\|f\|_2, \tag{8}$$

$$\|f\|_2 \le \sqrt{b-a}\|f\|_\infty. \tag{9}$$

Αποδείξτε όμως ότι δεν υπάρχουν ανισότητες της μορφής

$$\|f\|_2 \le C_1\|f\|_1 \ \text{ ή } \ \|f\|_\infty \le C_2\|f\|_2,$$

όπου οι σταθερές C_1, C_2 δεν εξαρτώνται από την f.

Για το τελευταίο ερώτημα βρείτε συναρτήσεις $f \in C([a, b])$ τ.ώ. το πηλίκο $\|f\|_2/\|f\|_1$ να γίνεται οσοδήποτε μεγάλο. Ομοίως για το πηλίκο $\|f\|_\infty/\|f\|_2$.

Πρόβλημα 4. Έστω $f \in C([0, 1])$ και $1 \le p \le q \le \infty$. Δείξτε ότι $\|f\|_p \le \|f\|_q$.

Η περίπτωση $q = \infty$ είναι τετριμμένη. Αν $q < \infty$ γράψτε $\int_0^1 |f(x)|^p\,dx = \int_0^1 1 \cdot |f(x)|^p\,dx$ και εφαρμόστε στο τελευταίο ολοκλήρωμα την ανισότητα Hölder με εκθέτη q/p για τον παράγοντα $|f(x)|^p$ και με το συζυγή εκθέτη αυτού για τον παράγοντα 1.

Πρόβλημα 5. Αν $f \in C([0, 1])$ δείξτε ότι $\|f\|_p \to \|f\|_\infty$ για $p \to \infty$.

Έστω $\epsilon > 0$ και $x_0 \in [0, 1]$ τ.ώ. $|f(x_0)| = \|f\|_\infty$. Από τη συνέχεια της f υπάρχει διάστημα μήκους $\delta > 0$ τ.ώ. μέσα σε αυτό να έχουμε $|f(x)| \ge \|f\|_\infty - \epsilon$. Εκτιμείστε το $\int_0^1 |f(x)|^p\,dx$ προς τα κάτω από το ολοκλήρωμα της $|f(x)|^p$ μέσα σε αυτο το διάστημα μόνο.

Πρόβλημα 6. Δύο συναρτήσεις $f, g \in C([a, b])$ ονομάζονται μεταξύ τους *ορθογώνιες* αν

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx = 0.$$

Δείξτε ότι οι συναρτήσεις

$$1, \cos\left(2\pi n(b-a)^{-1}x\right), \sin\left(2\pi n(b-a)^{-1}x\right), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{10}$$

είναι ανά δύο ορθογώνιες.

Το ίδιο και για τις συναρτήσεις

$$e^{\frac{2\pi i}{b-a}nx}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{11}$$

Αποδείξτε πρώτα το τελευταίο ερώτημα στο οποίο οι υπολογισμοί είναι πολύ ευκολότεροι. Έπειτα, χρησιμοποιώντας τη βασική σχέση

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \quad (\theta \in \mathbb{R})$$

εκφράστε κάθε μια από τις συναρτήσεις στην (10) ως γραμμικό συνδυασμό κάποιων συναρτήσεων στην (11) και χρησιμοποιείστε την γραμμικότητα του εσωτερικού γινομένου για να αποδείξετε την ορθογωνιότητα των (10).

Πρόβλημα 7. Αν $f_1, \ldots, f_k \in C([a,b])$ είναι ανά δύο ορθογώνιες (δείτε το Πρόβλημα 6) δείξτε ότι

$$\|f_1 + \cdots + f_k\|_2^2 = \|f_1\|_2^2 + \cdots + \|f_k\|_2^2.$$

Χρησιμοποιείστε την έκφραση της 2-νόρμας μέσω του εσωτερικού γινομένου ($\|f\|_2^2 = \langle f, f\rangle$) και τη γραμμικότητα του εσωτερικού γινομένου.

Πρόβλημα 8. Υπολογίστε τη 2-νόρμα της συνάρτησης $f(x) = e^{ix} - e^{2ix} + 2e^{5ix}$ στο χώρο $C([0, 2\pi])$.
Χρησιμοποιείστε το Πρόβλημα (7).

Πρόβλημα 9. Έστω $p(x) \in C([0,1])$ το πολυώνυμο $p(x) = \sum_{j=0}^{n} p_j x^j$. Δείξτε ότι

$$\|p\|_2^2 = \sum_{i,j=0}^{n} \frac{p_i \overline{p_j}}{i+j+1}.$$

Χρησιμοποιείστε τη γραμμικότητα του εσωτερικού γινομένου.

Πρόβλημα 10. Έστω $f \in C([0,T])$, $f(0) = 0$, παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο στο $[0,T]$. Δείξτε ότι υπάρχει μια σταθερά C που δεν εξαρτάται από την f αλλά μόνο από το T τ.ώ.

$$\|f\|_2 \le C\|f'\|_2. \tag{12}$$

$f(x) = \int_0^x f'(t)\,dt$ από το θεμελιώδες θεώρημα του Απειρ. Λογισμού. Χρησιμοποιείστε την ανισότητα Cauchy-Schwarz.

Πρόβλημα 11. Ας είναι $f_n \in C([a,b])$, $n = 1, 2, \ldots$, συναρτήσεις τ.ώ.

$$\|f_n - f\|_\infty \to 0, \quad (n \to \infty) \tag{13}$$

για κάποια συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{C}$. Αποδείξτε ότι $f \in C([a,b])$.

Πρόβλημα 12. Έστω $f(x) = x^2$, $x \in [-1,1]$. Υπολογίστε την ποσότητα

$$\inf\left\{\|p - f\|_\infty : \ p \in \mathcal{P}^1\right\},$$

όπου $\mathcal{P}^1$ είναι το σύνολο των γραμμικών πολυωνύμων $p(x) = p_0 + p_1 x$, $p_j \in \mathbb{C}$.