Ομάδα ασκήσεων Νο 4

Πρόβλημα 1. Έστω $f \in C^1([a,b])$. Αυτό σημαίνει ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ (πλευρικές παράγωγοι στα δύο άκρα του διαστήματος) και η f' είναι συνεχής στο $[a,b]$. Αν ω_f είναι το μέτρο συνέχειας της f

$$\omega_f(\delta) = \sup_{\substack{x,y\in[a,b]\\|x-y|<\delta}} |f(x)-f(y)|$$

δείξτε ότι $\omega_f(\delta) \le \|f'\|_\infty \delta$.

Δώστε παράδειγμα όπου η ανισότητα αυτή πιάνεται ως ισότητα καθώς και ένα παράδειγμα όπου η ανισότητα είναι γνήσια.

Θεώρημα μέσης τιμής.

Πρόβλημα 2. Έστω $\alpha > 0$. Μια συνάρτηση $f : K \to \mathbb{C}$ λέγεται *Lipschitz-α* αν υπάρχει μια σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε για κάθε $x, y \in K$ να ισχύει

$$|f(x) - f(y)| \le C|x-y|^\alpha.$$

Το σύνολο όλων αυτών των συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το K συμβολίζεται με Lip_α. Ας είναι K ένα διάστημα.

(1) Δείξτε ότι κάθε τέτοια συνάρτηση είναι συνεχής στο K.
(2) Αν $\alpha > 1$ δείξτε ότι οι μόνες συναρτήσεις που περιέχονται στο Lip_α είναι οι σταθερές.
Δείξτε ότι κάθε τέτοια συνάρτηση έχει παντού παράγωγο 0.
(3) Δείξτε ότι για $0 < \alpha \le 1$ το σύνολο Lip_α είναι γραμμικός χώρος.
(4) Αποδείξτε ότι αν $0 < \beta < \alpha \le 1$ τότε $\mathrm{Lip}_\alpha \subseteq \mathrm{Lip}_\beta$. Αποδείξτε επίσης ότι ο εγκλεισμός αυτός είναι γνήσιος.
Αποδείξτε πρώτα ότι για $x, y > 0$ ισχύει $(x+y)^\alpha \le x^\alpha + y^\alpha$.
(5) Βρείτε ένα άνω φράγμα για το μέτρο συνέχειας μιας συνάρτησης στο Lip_α.

Πρόβλημα 3. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ να είναι η συνάρτηση $f(x) = |x|$. Υπολογίστε το μέτρο συνέχειας της f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Πρόβλημα 4. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ για $x \in (0,1)$. Υπολογίσε το μέτρο συνέχειας της f. Είναι η f ομοιόμορφα συνεχής στο $(0,1)$?

Πρόβλημα 5. Έστω $f, f_n : [0,1] \to \mathbb{C}$ συνεχείς συναρτήσεις ($n = 1, 2, \ldots$).

(1) Δείξτε ότι αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[0,1]$ τότε ισχύει $\omega_{f_n}(\delta) \to \omega_f(\delta)$ για κάθε $\delta > 0$. Είναι η σύγκλιση $\omega_{f_n} \to \omega_f$ ομοιόμορφη για όλα τα θετικά δ?
(2) Φτιάξτε ένα παράδειγμα τέτοιων συναρτήσεων που να έχουμε $f_n(x) \to f(x)$ για κάθε $x \in [0,1]$ αλλά να μην ισχύει $\omega_{f_n}(\delta) \to \omega_f(\delta)$ για κανένα θετικό δ.