

Οι ασκήσεις αυτές είναι για να λυθούν από εσάς ως μέρος της προετοιμασίας σας για το τελικό διαγώνισμα. Θα εξεταστείτε και στο πρώτο μέρος του μαθήματος για το οποίο έχετε ήδη υλικό. Θα πρέπει επίσης να λύσετε και τις ασκήσεις που σας ανατέθηκαν κατά τη διάρκεια του εξαμήνου.

1. Υπολογίστε το  $\oint_C z^5 dz$ , όπου  $C$  η ανοιχτή πολυγωνική καμπύλη που ενώνει με ευθύγραμμα τμήματα τα σημεία  $-i$  (πρώτο),  $1$ ,  $i$  (τελευταίο).

2. Υπολογίστε το  $\int_C \frac{1}{z} dz$ , όπου  $C$  το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία  $1, 1+i$ .

3. Ας είναι  $C$  μια απλή κλειστή καμπύλη και  $w \in \mathbb{C} \setminus C$ . Ορίζουμε

$$g(w) = \oint_C \frac{z^3 + 2z}{(z-w)^3} dz.$$

Δείξτε ότι αν  $w$  στο εσωτερικό της  $C$  τότε  $g(w) = 6\pi iw$  ενώ αν όχι τότε  $g(w) = 0$ .

4. Δείξτε ότι για κάθε  $a \in \mathbb{R}$  ισχύει  $\int_0^\pi e^{a \cos \theta} \cos(a \sin \theta) d\theta = \pi$ . Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το ολοκλήρωμα

$$\oint_{\{|z|=1\}} \frac{e^{az}}{z} dz.$$

5. Αν  $f$  ακέραια δείξτε ότι το μέγιστο της  $\operatorname{Re} f(z)$  για  $|z| \leq 1$  πιάνεται πάνω στον κύκλο  $|z| = 1$ .

6. Αν  $f$  ακέραια τέτοια ώστε  $|f(z)| \leq 10|z|$  για  $z \in \mathbb{C}$  δείξτε ότι  $f(z) = az$  για κάποιο  $a \in \mathbb{C}$ .

7. Αν  $f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2}$  βρείτε όλα τα αναπτύγματα Laurent της  $f$  με κέντρο το  $0$  και πείτε σε ποιο χωρίο ισχύει το κάθε ένα (μην ασχοληθείτε με τα σύνορα των χωρίων).

8. Όπως στην ερώτηση 7 αλλά για τη συνάρτηση  $f(z) = \frac{1}{z(1+z^2)}$ .

9. Αν  $c \in \mathbb{C}$  τι είδους ανωμαλία έχει η συνάρτηση  $(e^{cz} - 1)/z$  στο  $0$ ;

10. Αν  $f, g$  αναλυτικές στο  $a$ ,  $f(a) = g(a) = 0$  και  $g'(a) \neq 0$  δείξτε ότι  $\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$ .

11. Για τις παρακάτω συναρτήσεις προσδιορίστε τις ανωμαλίες τους και το είδος της κάθε μιας.

$$(a) ze^{1/z}, \quad (b) z^2/(1+z), \quad (c) \sin z/z, \quad (d) \cos z/z, \quad (e) 1/(2-z)^3.$$

12. Για τις παρακάτω συναρτήσεις βρείτε το υπόλοιπό τους στο  $0$ .

$$(a) (z+z^2)^{-1}, \quad (b) z \cos \frac{1}{z}, \quad (c) \frac{z - \sin z}{z}, \quad (d) \frac{\sinh z}{z^4(1-z^2)}.$$

13. Αν  $C$  είναι ο κύκλος  $|z| = 1$  και η  $f$  είναι αναλυτική πάνω και έξω από τον  $C$  δείξτε ότι

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz = \operatorname{Res} \left( \frac{1}{z^2} f(1/z); 0 \right).$$

14. Αν  $C$  είναι ο κύκλος  $|z| = 3$  υπολογίστε το ολοκλήρωμα των παρακάτω συναρτήσεων πάνω στο  $C$  με τη θετική φορά

$$(a) \frac{e^{-z}}{z^2}, \quad (b) z^2 e^{1/z}, \quad (c) \frac{z+1}{z^2-2z}.$$

15. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$(a) \int_0^\infty \frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4} dx, \quad (b) \int_0^\infty \frac{\cos 3x}{1+x^2} dx, \quad (c) \int_{-\infty}^\infty \frac{x \sin x}{x^2+2x+2} dx.$$