Διάρκεια διαγωνίσματος 1 ώρα.

Λύσεις ενός διαγωνίσματος πολλαπλών επιλογών

Πρόβλημα 1. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να ζευγαρώσουμε όλους τους άνδρες $m_1, m_2, \ldots, m_9$ με όλες τις γυναίκες $w_1, w_2, \ldots, w_9$;
A: 9! B: $(9!)^2$ C: 8! D: $\binom{9}{2}$
Λύση: Βάζουμε τις γυναίκες στη σειρά $w_1, w_2, \ldots, w_9$ και μετά διατάσσουμε τους άνδρες δίπλα τους με όλους τους δυνατούς τρόπους. Για κάθε διάταξη ζευγαρώνουμε τη γυναίκα w_i με τον i-οστό άνδρα. Άρα υπάρχουν τόσα ζευγαρώματα όσες και διατάξεις των ανδρών, δηλ. 9!.

Πρόβλημα 2. Γεμίζουμε 10 κουτιά χωρητικότητας 0-4 με μπάλες. Τα κουτιά και οι μπάλες δε διακρίνονται μεταξύ τους (όμοια). Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό;
A: $\frac{15\cdot14\cdot13\cdot12\cdot11}{5!}$ B: 5^{10} C: $\binom{10}{5}$ D: $\frac{14\cdot13\cdot12\cdot11}{4!}$
Λύση: Για κάθε ένα από τα 10 κουτιά επιλέγουμε έναν από τους αριθμούς $0-4$ και βάζουμε τόσες μπάλες μέσα του. Αφού η σειρά των κουτιών δεν έχει σημασία (όμοια κουτιά) είναι σα να επιλέγουμε με επανάθεση 10 φορές από το σύνολο $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Η απάντηση δηλ. είναι $\left\langle {5 \atop 10} \right\rangle = \binom{5+10-1}{10} = \binom{14}{10} = \binom{14}{4}$ (απάντηση D).

Πρόβλημα 3. Θέλουμε να χωρίσουμε τα άτομα $1, 2, \ldots, 15$ σε τρεις ομάδες των 5 ατόμων, την κόκκινη, την πράσινη και τη μπλε. (Δεν υπάρχει εσωτερική σειρά σε κάθε ομάδα.) Πρέπει όμως ο 1 να ανήκει στην κόκκινη ομάδα, ο 2 στην πράσινη και ο 3 στη μπλε. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό;
A: $\frac{15!}{(24)^3}$ B: $\frac{12!}{(24)^3}$ C: $\frac{12!}{(5!)^3}$ D: $\frac{15!}{(5!)^3}$
Λύση: Οι 1, 2, 3 είναι ήδη τοποθετημένοι οπότε μας μένουν 12 άτομα να τοποθετήσουμε σε τρεις ομάδες των 4 ατόμων (αφού μια από τις 5 θέσεις είναι ήδη κατειλημμένη σε κάθε ομάδα). Αυτό γίνεται με $\binom{12}{4,4,4}$ τρόπους (απάντηση B).

Πρόβλημα 4. Πόσες επί συναρτήσεις υπάρχουν από το σύνολο $\{1, 2, \ldots, k\}$ στον εαυτό του;
A: k^k B: 2^k C: $(k-1)!$ D: $k!$
Λύση: Όσες και 1 προς 1 αφού μια συνάρτηση από ένα πεπερασμένο σύνολο στον εαυτό του είναι επί αν και μόνο αν είναι 1 προς 1. Οι 1 προς 1 είναι όσες και οι διατάξεις του συνόλου $\{1, 2, \ldots, k\}$ δηλ. $k!$.

Πρόβλημα 5. Έχουμε 10 διαφορετικές πόλεις, τις $\{c_1, \ldots, c_{10}\}$. Κάθε δύο από αυτές μπορεί να συνδέεονται μεταξύ τους με απ' ευθείας πτήση ή όχι. Πόσες διαφορετικές καταστάσεις μπορούν να υπάρξουν όσον αφορά τις μεταξύ τους συνδέσεις;
A: 2^{10} B: $\binom{10}{2}$ C: 10! D: 2^{45}
Λύση: Υπάρχουν $\binom{10}{2} = \frac{10\cdot9}{2} = 45$ ζεύγη πόλεων και για κάθε ένα από αυτά επιλέγουμε, ανεξάρτητα από τα άλλα, το αν θα υπάρχει απ' ευθείας σύνδεση ανάμεσα στις δύο πόλεις ή όχι (2 επιλογές). Άρα, συνολικά, έχουμε 2^{45} δυνατότητες.

Πρόβλημα 6. Από 20 άτομα επιλέγουμε συμβούλιο με (α) πρόεδρο, (β) αντιπρόεδρο και (γ) τρία μέλη. (Τα τρία μέλη έχουν απολύτως ισοδύναμους ρόλους.) Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό;
A: $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16$ B: $\binom{18}{3}\binom{20}{2}$ C: $2 \cdot \binom{20}{5}$ D: $2\binom{18}{3}\binom{20}{2}$
Λύση: Διαλέγουμε πρώτα τον πρόεδρο (20 επιλογές), μετά τον αντιπρόεδρο (19 επιλογές αφού πρέπει όλοι οι επιλεχθέντες να είναι διαφορετικά άτομα) και μετά διαλέγουμε 3 από τα υπόλοιπα 18 άτομα χωρίς να μας ενδιαφέρει το με ποια σειρά τους επιλέγουμε αφού τα μέλη δε διακρίνονται μεταξύ τους ($\binom{18}{3}$ επιλογές). Συνολικά έχουμε $20 \cdot 19 \cdot \binom{18}{3}$ επιλογές (απάντηση D).