Διάρκεια διαγωνίσματος 50 λεπτά. Κλειστές όλες οι σημειώσεις.
Οι αποδείξεις σας να είναι πλήρεις και να φαίνεται καθαρά τι υποθέτετε ως γνωστό.
Έχει μεγάλη σημασία και το πώς γράφετε.

Πρώτο διαγώνισμα, 25 Οκτωβρίου 2010

Πρόβλημα 1. Αποδείξτε επαγωγικά ότι για κάθε $n \geq 1$ ισχύει

$$1^3 + 2^3 + \cdots n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2.$$

Λύση: Έστω $a_n = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$, $b_n = (1 + 2 + \cdots + n)^2$. Θέλουμε να δείξουμε $a_n = b_n$ για κάθε $n \geq 1$. Κατ' αρχήν επαληθεύουμε ότι $a_1 = b_1 = 1$, άρα η πρότασή μας ισχύει για $n = 1$. Για να δείξουμε τη συνεπαγωγή $a_n = b_n \Rightarrow a_{n+1} = b_{n+1}$ αρκεί να δείξουμε ότι

$$a_{n+1} - a_n = b_{n+1} - b_n.$$

Το αριστερό μέλος αυτής είναι $(n + 1)^3$ και το δεξί μέλος γράφεται, ως διαφορά τετραγώνων,

$$(1+\cdots+n+(n+1))^2 - (1+\cdots+n)^2 = (n+1)(2(1+2+\cdots+n)+n+1) = (n+1)(n(n+1)+n+1) = (n+1)^3.$$

Παραπάνω χρησιμοποιήσαμε τον τύπο $1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$.

Πρόβλημα 2. Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε δύο υποσύνολα $A, B \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ τέτοια ώστε $A \subseteq B$;

Λύση: Αν γνωρίζουμε τα σύνολα A, $B \setminus A$ τότε το ζεύγος συνόλων A, B είναι πλήρως καθορισμένο. Τα σύνολα $A, B \setminus A, \{1, 2, \ldots, n\} \setminus B$ είναι ανά δύο ξένα και η ένωσή τους είναι το $\{1, 2, \ldots, n\}$. Επιλέγουμε λοιπόν για κάθε στοιχείο του $\{1, 2, \ldots, n\}$ το σε ποιο από αυτά τα 3 σύνολα ανήκει. Αυτό μας δίνει 3 επιλογές για κάθε στοιχείο και συνολικά 3^n επιλογές.

Πρόβλημα 3. Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε 6 από τα 52 φύλλα μιας συνηθισμένης τράπουλας, όπου κάθε φύλλο καθορίζεται από ένα αριθμό (1-13) και ένα χρώμα (1-4, εκ των οποίων τα δύο χρώματα είναι μαύρα και τα δύο κόκκινα), τέτοια ώστε

- 4 φύλλα να είναι μαύρα και 2 φύλλα να είναι κόκκινα,
- Τα μαύρα φύλλα χωρίζονται σε 2 ζεύγη όπου τα δύο φύλλα κάθε ζεύγους έχουν τον ίδιο αριθμό;

Λύση: Τα κόκκινα χαρτιά επιλέγονται ανεξάρτητα από τα μαύρα. Υπάρχουν $\binom{26}{2}$ τρόποι να επιλεγούν τα κόκκινα. Για να επιλέξουμε τα μαύρα παρατηρούμε ότι τα μαύρα φύλλα σχηματίζουν 13 ζεύγη με τον ίδιο αριθμό σε κάθε ζεύγος (1 σπαθί και 1 μπαστούνι, 2 σπαθί και 2 μπαστούνι, κλπ). Επιλέγουμε 2 από αυτά τα ζεύγη και αυτό γίνεται με $\binom{13}{2}$ τρόπους. Συνολικά υπάρχουν λοιπόν $\binom{26}{2}\binom{13}{2}$ εξάδες που πληρούν τα κριτήρια.