Δεύτερο διαγώνισμα, 29 Νοεμβρίου 2010

Πρόβλημα 1. Αποδείξτε με συνδυαστικό επιχείρημα (όχι πράξεις) ότι αν $0 < k < m < n$ τότε
$$\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}.$$

Λύση: Και τα δύο μέλη της ισότητας μετρούν την ίδια ποσότητα: πόσα ζεύγη A και B υποσυνόλων του $\{1, 2, \ldots, n\}$ υπάρχουν τέτοια ώστε $A \subseteq B$ και επίσης $|A| = k, |B| = m$.

Στο αριστερό μέλος, ο πρώτος παράγοντας μετράει με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε το σύνολο B και ο δεύτερος παράγοντας μετράει με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε το A ως ένα k-μελές υποσύνολο του B.

Στο δεξί μέλος ο πρώτος παράγοντας μετράει με πόσους τρόπους μπορεί να επιλεγεί το B και ο δεύτερος παράγοντας μετράει με πόσους τρόπους μπορεί να επιλεγεί το σύνολο $B \setminus A$, το οποίο έχει μέγεθος $m - k$ και επιλέγεται από τα $n - k$ στοιχεία που απέμεινας μετά την επιλογή του B.

Πρόβλημα 2. Έστω G απλό γραφημα με k συνεκτικές συνιστώσες και n κορυφές.

(α) Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός ακμών του G;

(β) Ποιος είναι ο μέγιστος αριθμός ακμών του G;

Λύση: (α) Για να πετύχουμε τον ελάχιστο αριθμό ακμών με δεδομένα τα n και k παίρνουμε την κάθε μια από τις k συνιστώσες να είναι δέντρο. Αν είναι $n_1, \ldots, n_k$ τα μεγέθη των συνιστωσών τότε το συνολικό πλήθος ακμών είναι $(n_1 - 1) + \cdots + (n_k - 1) = n - k$.

(β) Για να πετύχουμε το μέγιστο πλήθος ακμών πρέπει η κάθε συνιστώσα να είναι πλήρες γράφημα, οπότε το συνολικό πλήθος ακμών είναι $\binom{n_1}{2} + \cdots + \binom{n_k}{2}$. Η ποσότητα αυτή εξαρτάται από τα n_j (η αντίστοιχη ποσότητα στο (α) υποερώτημα δεν εξαρτιόταν) άρα πρέπει να δούμε ποια επιλογή των n_j τη μεγιστοποιεί, υπό τις συνθήκες $n_1 + \cdots + n_k = n$, και $n_1 \geq 1, \ldots, n_k \geq 1$.

Ας είναι λοιπόν $n_1, \ldots, n_k$ μια επιλογή που μεγιστοποιεί την ποσότητα. Κάνουμε την παρατήρηση ότι δεν μπορεί να υπάρχουν δύο συνιστώσες που έχουν και οι δύο περισσότερες από μια κορυφή. Αν υπάρχουν δύο τέτοιες συνιστώσες (είναι και οι δύο πλήρη γραφήματα), ας πούμε με n_1 και n_2 κορυφές με $n_1 \geq n_2 \geq 2$, τότε αν πάρουμε μια κορυφή από την δεύτερη συνιστώσα και την βάλουμε στην πρώτη (ξανακάνοντας τις δύο συνιστώσες πλήρη γραφήματα) τότε κερδίζουμε τουλάχιστον μια ακμή σε σχέση με πριν. Αυτό γίνεται γιατί χάνουμε $n_2 - 1$ ακμές από τη δεύτερη συνιστώσα αλλά κερδίζουμε n_1 ακμές στην πρώτη (που απέκτησε μια παραπάνω κορυφή). Αυτό αντιφάσκει με την υπόθεση ότι τα $n_1, \ldots, n_k$ αποτελούσαν τιμές που μεγιστοποιούσαν το πλήθος ακμών.

Άρα υπάρχουν $k - 1$ συνιστώσες μια μια κορυφή η κάθε μια (και καμία ακμή) και μια ακόμη συνιστώσα που είναι ένα πλήρες γράφημα με $n - k + 1$ κορυφές. Το μέγιστο πλήθος των ακμών είναι λοιπόν $\binom{n-k+1}{2}$.

Πρόβλημα 3. Έστω απλό γράφημα G με δύο ακριβώς συνεκτικές συνιστώσες οι οποίες είναι δέντρα (το G είναι δηλ. δάσος). Έστω u μια κορυφή από τη μια συνιστώσα και v μια κορυφή από την άλλη. Προσθέτουμε στο γράφημα G την ακμή uv που ενώνει τις u και v.

Δείξτε ότι το γράφημα που προκύπτει είναι δέντρο.

Λύση: Η προσθήκη της ακμής uv κάνει το νέο γράφημα συνεκτικό αφού οι δύο συνεκτικές συνιστώσες του G πλέον επικοινωνούν.

Αν οι δύο συνιστώσες του G έχουν m και n κορυφές αντίστοιχα, τότε έχουν $m - 1$ και $n - 1$ κορυφές αντίστοιχα αφού είναι δέντρα. Το καινούριο γράφημα έχει $m+n$ κορυφές και $(m-1)+(n-1)+1 = m+n-1$ ακμές. Αφού είναι συνεκτικό και το πλήθος των ακμών του είναι κατά ένα λιγότερο από το πλήθος κορυφών του, πρόκειται για δέντρο.

Διάρκεια διαγωνίσματος 50 λεπτά. Κλειστές όλες οι σημειώσεις. Οι αποδείξεις σας να είναι **πλήρεις** και να φαίνεται καθαρά τι υποθέτετε ως γνωστό. Έχει μεγάλη σημασία και το πώς γράφετε.