

Διαγώνισμα Σεπτεμβρίου, 19 Σεπτεμβρίου 2012

1. Πόσες εξάδες (χωρίς εσωτερική σειρά) μπορούμε να φτιάξουμε από μια συνηθισμένη τράπουλα σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις;

- (1) Κάθε εξάδα έχει 3 κόκκινα και 3 μαύρα φύλλα.
- (2) Κάθε εξάδα έχει ακριβώς 2 άσους και τα υπόλοιπα φύλλα είναι όλα κόκκινα.
- (3) Κάθε εξάδα περιέχει 6 συνεχόμενα νούμερα (η σειρά των αριθμών είναι: 1, 2, ..., 9, 10, J, Q, K).

2. Πόσες κυκλικές διατάξεις των αριθμών  $1, 2, \dots, N$  μπορούμε να φτιάξουμε έτσι ώστε το 1 να είναι δίπλα στο 2;

3. (α) Δείξτε ότι σε κάθε γράφημα  $G = (V, E)$  ισχύει η ισότητα

$$\sum_{v \in V} \deg v = 2|E|.$$

(β) Έστω  $T$  ένα δέντρο χωρίς κορυφές βαθμού 2. Δείξτε ότι το πολύ οι μισές κορυφές του  $T$  έχουν βαθμό  $> 2$ .

4. Με πόσους τρόπους μπορούμε να διατάξουμε τους αριθμούς  $1, 2, \dots, 5n$  ( $n \geq 1$ ) έτσι ώστε στις θέσεις που είναι πολλαπλάσια του 5 (δηλ. στις θέσεις  $5, 10, 15, \dots, 5n$ ) να υπάρχουν μόνο αριθμοί που είναι πολλαπλάσια του 5;

5. Αποδείξτε με συνδυαστικό επιχειρήμα (όχι με πράξεις δηλ.) τις ταυτότητες:

$$(1) \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \text{ για } 0 \leq k \leq n.$$

$$(2) \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} = 2^k, k \geq 0.$$

6. Έστω  $G = (V, E)$  ένα απλό γράφημα. Το γράφημα ακμών (line graph) του  $G$ , που το συμβολίζουμε με  $L(G) = (V', E')$ , είναι ένα απλό γράφημα που έχει ως κορυφές του τις ακμές του  $G$ , έχουμε δηλ.  $V' = E$ . Δύο κορυφές του  $L(G)$  συνδέονται με ακμή στο  $L(G)$  αν και μόνο αν οι αντίστοιχες ακμές του  $G$  έχουν κοινή κορυφή. Δείξτε ότι το πλήθος των ακμών του  $L(G)$  είναι  $|E'| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} (\deg_G v)^2 - |E|$ .

---

**ΚΑΝΟΝΕΣ:**

(α) Διάρκεια διαγωνίσματος: 2 ώρες. Δεν επιτρέπεται η χρήση σημειώσεων, βιβλίων ή υπολογιστικών μηχανών.

(β) Δεν επιτρέπεται η έξοδος σας από την αίθουσα παρά μόνο αφού τελειώσετε και μόνο μετά από μία ώρα.

(γ) Επιστρέφεται το γραπτό σας, τα θέματα και όλα τα πρόχειρα που πήρατε.

(δ) Το κινητό σας τηλέφωνο πρέπει να είναι κλειστό, όχι απλά αθόρυβο. **Ανοιχτό τηλέφωνο συνεπάγεται μηδενισμό σας.**

(ε) Οι αποδείξεις σας να είναι πλήρεις και να φαίνεται καθαρά τι υποθέτετε ως γνωστό. Έχει μεγάλη σημασία και το πώς γράφετε.

(στ) **Δείχνετε απαραίτητα ταυτότητα πριν φύγετε.**