

Άσκηση 2.37

Α' τρόπος

Το σύνολο $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ περιέχει n άρτιους και n περιττούς αριθμούς. Εφόσον θέλω το πλήθος των υποσυνόλων με k ακριβώς περιττούς αριθμούς, στην ουσία θέλω το πλήθος των υποσυνόλων που θα περιέχουν: είτε k περιττούς και κανένα άρτιο, είτε k περιττούς και 1 άρτιο, είτε k περιττούς και 2 άρτιους..... είτε k περιττούς και n άρτιους.

Ο υπολογισμός του υποσυνόλου με k περιττούς και κανένα άρτιο θα είναι:

$$\binom{n}{k}$$

Ο υπολογισμός του υποσυνόλου με k περιττούς και 1 άρτιο θα είναι:

$$\binom{n}{k} \binom{n}{1}$$

Ο υπολογισμός του υποσυνόλου με k περιττούς και 2 άρτιους θα είναι:

$$\binom{n}{k} \binom{n}{2}$$

.....
Ο υπολογισμός του υποσυνόλου με k περιττούς και n άρτιους θα είναι:

$$\binom{n}{k} \binom{n}{n}$$

Άρα ο αριθμός των διαφορετικών υποσυνόλων με την δοθείσα ιδιότητα είναι το άθροισμα όλων των παραπάνω δηλαδή:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k} \binom{n}{1} + \binom{n}{k} \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{k} \binom{n}{n} =$$

$$\binom{n}{k} \left(\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} \right) =$$

$$\binom{n}{k} 2^n$$

Β' Τρόπος (Πιο απλά)

Εφόσον θέλω να επιλέξω k περιττούς από τους συνολικά n που έχω αυτό μπορώ να το κάνω με

$$\binom{n}{k}$$

διαφορετικούς τρόπους και κατόπιν εφόσον δεν μου δινετε περιορισμός για την επιλογή των άρτιων μπορώ να διαλέξω οποιοδήποτε υποσύνολο αυτών απο τους n που έχουμε στη διάθεση μας το οποίο ισούται με το δυναμοσύνολο αυτού του συνόλου το οποίο ισούται με 2^n διαφορετικούς τρόπους και εφόσον αυτά είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους το τελικό αποτέλεσμα είναι το μεταξύ γινόμενο τους.
Άρα

$$\binom{n}{k} 2^n$$

διαφορετικοί τρόποι