3.16

Θα ξεκινήσουμε από το διωνυμικό θεώρημα όταν $a=x$, $b=1$ και θα παραγωγίσουμε τη σχέση που προκύπτει ως προς x, δηλαδή θα έχουμε:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} x^k \Rightarrow$$

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \overset{d/dx}{\Rightarrow}$$

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k\, x^{k-1} \overset{d/dx}{\Rightarrow}$$

$$n(n-1)(1+x)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k(k-1)\, x^{k-2}$$

Θέτοντας τώρα για $x=1$ παίρνουμε τη σχέση

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k(k-1) = n(n-1)2^{n-2}$$

που είναι το ζητούμενο.