

Άσκηση 4.16

κάθε κορυφή συνδέεται με κάθε άλλη (μέσω ενός
πρωταρχικού)

Δείξτε ότι, για συνεκτικό γράφημα G η κορυφή
και λιγότερες από n ακμές έχει αναγκαστικά μια
κορυφή βαθμού 1.

Λύση

$$|V| = n$$

$$|E| < n$$

Τότε υπάρχει $v \in V : \deg(v) = 1$. (*)

Πάμε με άτοπο...

Έστω ότι δεν ισχύει η (*)

Αρα $\boxed{\forall v \in V \deg(v) \geq 2}$ (1)

Οπωσδήποτε συμβαίνει ότι:

$$\sum_v \deg(v) = 2|E|$$

το φράγμα από το 2

Επίσης από (1) έχουμε ότι $\sum_v \deg(v) \geq 2n$

$$\text{Αρα } 2 \cdot |E| = \sum_v \deg(v) \geq 2n$$

$$\text{Αρα } 2|E| \geq 2n$$

Αρα $|E| \geq n$ άτοπο στο υπόθεση, αρα
 $|E| < n$.