

Άσκηση 4.99

Δείξτε ότι αν προσθέσουμε μια ακμή σε ένα δέντρο τότε δημιουργούμε ακριβώς ένα κύκλο.

Λύση

Έστω n το πλήθος των κορυφών του δέντρου.

Το δέντρο έχει $n-1$ ακμές.

Αφαιρώντας μια ακμή έχω n ακμές, ορα ναίει να είναι δέντρο.

Η πιθανή απόσταση ταξινόχιστον είναι κύκλο.

Θέλω να δείξω ότι δημιουργείται ακριβώς ένα κύκλο.

Πάρτε tt άτομο!

Έστω ότι υπάρχουν δύο κύκλοι στο γράφημα που δημιουργείται.

Τότε επιλέγουμε μια ακμή που ανήκει στον έναν κύκλο και όχι στον άλλο και την αφαιρούμε.

(βέβαια υπάρχει αυτή η ακμή αλλιώς οι δύο κύκλοι θα ήταν ίδιοι).

Αρα καταστρέφεται τον έναν κύκλο αλλά όχι τον άλλο.

Επίσης δεν χάνεται η συνεκτικότητα του γραφήματος tt το σπάσιμο ενός κύκλου.

Προκίπτει έτσι, ένα συνεκτικό γράφημα tt n κορυφών και $n-1$ ακμών, δηλαδή ένα δέντρο.

Αυτό είναι αδιεπίλυτο tt το ότι έχει συνδέσει ένα κύκλο στο γράφημα και. Αρα δεν υπάρχει $2^{\text{ος}}$ κύκλος.