

Άσκηση 4.7

Πόσες ακμές έχει το πλήρες γράφημα K_n ; Πόσα υπογράφητά του έχει το K_n ;

Λύση

Το πλήρες γράφημα με n κορυφές:

- έχει σύνολο κορυφών $[n]$, δηλαδή $V = \{1, 2, \dots, n\}$
- και όλες τις δυνατές ακμές.

$E =$ όλα τα διττά υποσύνολα του $[n] = \{1, \dots, n\}$

Άρα το K_n έχει $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ ακμές!

Έστω $G = (V, E)$

$G' = (V', E')$

Το G' είναι υπογράφημα του G αν $V' \subseteq V$
και $E' \subseteq E$

Άρα το K_n έχει $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{\binom{k}{2}}$ υπογράφητά του.

↓
Επιλέγω πρώτα τις κορυφές του και μετά για κάθε μία κορυφή βλέπω πόσα διττά υποσύνολα έχω που το κομμάτι στο οποίο ή θα ανήκει ή δεν θα ανήκει στο υπογράφημα. Άρα έχω 2 επιλογές για το κομμάτι.
Άρα συνολικά $2^{\binom{k}{2}}$ επιλογές!