Πανεπιστημιο Κρητησ, Τμ. Μαθηματικων, Θ. Πιθανοτητων (μεταπτ.), Εαρινο Εξαμηνο 2011-12

Πρώτο Διαγώνισμα, 16/5/2012

Διάρκεια διαγωνίσματος 3 ώρες, με κλειστές σημειώσεις.

Πρόβλημα 1. (10 μονάδες)
Έστω $\Sigma_n \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ακολουθία από σ-άλγεβρες.
(α) Ορίστε τη "ουρά" της Σ_n και αποδείξτε ότι είναι σ-άλγεβρα.
(β) Αν $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ ανεξάρτητη ακολουθία από ΤΜ δείξτε, διατυπώνοντας και χρησιμοποιώντας το κατάλληλο θεώρημα, ότι

$$\mathbb{P}\left[\sum_{n=1}^{\infty} X_n \text{ συγκλίνει}\right] \in \{0,1\}.$$

Πρόβλημα 2. (10 μονάδες)
Δείξτε ότι αν $\epsilon_n = \pm 1$ είναι ανεξάρτητες ΤΜ με $\mathbb{P}[\epsilon_n = 1] = \mathbb{P}[\epsilon_n = -1] = 1/2$ τότε η

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon_n}{n}$$

συγκλίνει με πιθανότητα 1.

Πρόβλημα 3. (10 μονάδες)
Έστω $X : \Omega \to \mathbb{R}$ ΤΜ. Δείξτε ότι η ποσότητα

$$\left(\mathbb{E}\left[|X|^r\right]\right)^{1/r},$$

όπου $r \geq 1$, είναι αύξουσα συνάρτηση του r.

Πρόβλημα 4. (20 μονάδες)
Αν $X_n \geq 0$ ανεξάρτητη ακολουθία ΤΜ και $Y_n = \min\{1, X_n\}$ δείξτε ότι

$$\sum_n X_n < \infty \text{ σ.σ. } \iff \sum_n \mathbb{E}[Y_n] < \infty.$$

Πρόβλημα 5. (30 μονάδες)
(α) Αν $X : \Omega \to \mathbb{R}$ με $\mathbb{E}\left[X^2\right] < \infty$ και $0 < \lambda < 1$ δείξτε ότι

$$\mathbb{P}\left[X \geq \lambda \mathbb{E}[X]\right] \geq (1-\lambda)^2 \frac{(\mathbb{E}[X])^2}{\mathbb{E}[X^2]}.$$

(β) Αν $a_k \in \mathbb{R}$ και $\epsilon_k = \pm 1$, $k = 1, 2, \ldots, n$, είναι ανεξάρτητες ΤΜ με $\mathbb{P}[\epsilon_k = 1] = 1/2$ και $Y = \sum_{k=1}^n \epsilon_k a_k$, δείξτε ότι για κάποια πεπερασμένη σταθερά C_1 ισχύει

$$\mathbb{E}\left[Y^4\right] \leq C_1 \left(\mathbb{E}\left[Y^2\right]\right)^2.$$

(γ) Για a_k, ϵ_k όπως στο (β) και $0 < \lambda < 1$ δείξτε ότι για κατάλληλη σταθερά $C_2 > 0$ ισχύει

$$\mathbb{P}\left[\left(\sum_{k=1}^n \epsilon_k a_k\right)^2 > \lambda \sum_{k=1}^n a_k^2\right] \geq C_2 (1-\lambda)^2.$$