Πανεπιστημιο Κρητης, Τμ. Μαθηματικων, Θ. Πιθανοτητων (μεταπτ.), Εαρινο Εξαμηνο 2011-12

Τελικό Διαγώνισμα, 8/6/2012

Διάρκεια διαγωνίσματος 3 ώρες, με κλειστές σημειώσεις.

Πρόβλημα 1. (20 μονάδες)
Έστω X και Y ανεξάρτητες ΤΜ με $X = \pm 1$ με ίση πιθανότητα και Y ομοιόμορφα κατανεμημένη στο $[-1, 1]$. Έστω Z ΤΜ που ορίζεται από τις X, Y με

$$Z = \begin{cases} Y & \text{αν } X = -1 \\ 3 & \text{αν } X = +1. \end{cases}$$

Περιγράψτε την κατανομή της Z (το μέτρο πιθανότητας δηλ. που επάγει στο $\mathbb{R}$) και υπολογίστε τη χαρακτηριστική της συνάρτηση.

Πρόβλημα 2. (20 μονάδες)
Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$. Αποδείξτε ότι $\lim_{|t|\to\infty} \widehat{f}(t) = 0$, όπου $\widehat{f}$ ο μετασχηματισμός Fourier της f.

Πρόβλημα 3. (20 μονάδες)
Έστω μ_n, μ μέτρα πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ και υποθέστε ότι η ακολουθία μ_n συγκλίνει ασθενώς στο μ. Δείξτε ότι $\widehat{\mu_n}(t) \to \widehat{\mu}(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$ και δώστε ένα παράδειγμα για να δείξετε ότι αυτή η σύγκλιση δεν είναι κατ΄ ανάγκη ομοιόμορφη στο $\mathbb{R}$.

Πρόβλημα 4. (20 μονάδες)
Έστω μ_n, μ μέτρα πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ με συναρτήσεις κατανομής F_n και F, και υποθέστε ότι η ακολουθία μ_n συγκλίνει ασθενώς στο μ. Αν $x \in \mathbb{R}$ είναι σημείο συνέχειας της $F(x)$ δείξτε ότι $F_n(x) \to F(x)$.

Πρόβλημα 5. (20 μονάδες)
Έστω ότι οι ανεξάρτητες ΤΜ X, Y ακολουθούν την τυπική κανονική κατανομή. Δείξτε ότι η ΤΜ $X + Y$ επίσης ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και τυπική απόκλιση $\sqrt{2}$.

Πρόβλημα 6. (20 μονάδες)
Ένας πραγματικός αριθμός x λέγεται *κανονικός* αν για οποιδήποτε φυσικό αριθμό $b \geq 2$ ισχύει ότι αν γράψουμε τον x στο b-αδικό σύστημα

$$x = \sum_{k=-\infty}^{n} x_k b^k,$$

με $x_k \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$, τότε για κάθε $j \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$ ισχύει

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \#\{1 \leq i \leq N :\ x_{-i} = j\} = \frac{1}{b}.$$

Εξηγείστε πώς προκύπτει από το ισχυρό θεώρημα των μεγάλων αριθμών ότι σχεδόν όλοι (Lebesgue) οι πραγματικοί αριθμοί είναι κανονικοί.