Πανεπιστημιο Κρητης, Τμ. Μαθηματικων, Θ. Πιθανοτητων (μεταπτ.), Εαρινο Εξαμηνο 2011-12
Πρώτο φυλλάδιο ασκήσεων, 11/3/2012

Πρόβλημα 1. Δείξτε ότ δεν υπάρχει άπειρη και αριθμήσιμη σ-άλγεβρα.

Πρόβλημα 2. Στο χώρο πιθανοτήτων $\Omega = [0,1]$ με το μέτρο Lebesgue και με σ-άλγεβρα τα σύνολα Borel ορίζουμε τις ΤΜ $X_j(\omega)$, $j = 1, 2, \ldots$, να είναι το j-οστό ψηφίο μετά την υποδιαστολή στο δυαδικό ανάπτυγμα του ω (με την εξαίρεση ενός αριθμήσιμου πλήθους από ω το ψηφίο αυτό είναι μοναδικά καθορισμένο και άρα η συναρτήσεις X_j είναι ορισμένες σχεδόν παντού). Δείξτε ότι οι X_j είναι ανεξάρτητες.

Πρόβλημα 3. Αν A_n ενδεχόμενα σε ένα χώρο πιθανότητας με $\sum_n \mathbb{P}[A_n] < \infty$ δείξτε ότι $\mathbb{P}[\limsup A_n] = 0$, όπου το $\limsup A_n$ απαρτίζεται από εκείνα τα $\omega \in \Omega$ που ανήκουν σε άπειρα από τα A_n.

Πρόβλημα 4. Αν A_n ανεξάρτητα ενδεχόμενα με $\sum_n \mathbb{P}[A_n] = \infty$ δείξτε ότι $\mathbb{P}[\limsup A_n] = 1$.
Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε την ανισότητα $1 + x \le e^x$, $(x \in \mathbb{R})$.

Πρόβλημα 5. Αποδείξτε την ανισότητα του Chebyshev: Αν $\mathbb{E}\left[|X|^2\right] < \infty$ και $\mu = \mathbb{E}[X]$, $\sigma^2 = \mathbb{E}\left[|X-\mu|^2\right]$ τότε για $\lambda > 0$ ισχύει

$$\mathbb{P}[|X-\mu| \ge \lambda\sigma] \le \lambda^{-2}.$$

Διατυπώστε και αποδείξτε μια αντίστοιχη ανισότητα όπου στη θέση της συνάρτησης $t \to t^2$ υπάρχει μια οποιαδήποτε άλλη αύξουσα συνάρτηση $t \to \phi(x)$.

Πρόβλημα 6. (Εκθετικά φράγματα) Ας είναι $X_1, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες ΤΜ με τιμές 0 ή 1 με $p_j = \mathbb{E}[X_j]$ και $X = X_1 + \cdots + X_n$. Δείξτε ότι για $\delta > 0$ ισχύει

$$\mathbb{P}[X \ge (1+\delta)\mu] \le \left(e^{-\delta}(1+\delta)^{1+\delta}\right)^{-\mu}.$$

Αποδείξτε μια αντίστοιχη ανισότητα για την πιθανότητα $\mathbb{P}[X \le (1-\delta)\mu]$.
Υπόδειξη: Βρείτε ένα άνω φράγμα για την ποσότητα $\mathbb{E}\left[e^{tX}\right]$ και εφαρμόστε την ανισότητα του Markov ($\mathbb{P}[Y \ge \lambda \mathbb{E}[Y]] \le \lambda^{-1}$ για οποιαδήποτε $Y \ge 0$) αφού επιλέξετε ένα κατάλληλο t.

Πρόβλημα 7. Αποδείξτε την ανισότητα του Jensen: $\phi(\mathbb{E}[X]) \le \mathbb{E}[\phi(X)]$, όπου X είναι μια ΤΜ που παίρνει τιμές στο διάστημα $I = (a,b)$, $\phi : I \to \mathbb{R}$ είναι μια κυρτή συνάρτηση (δηλ. $\phi(\alpha x + (1-\alpha)y) \le \alpha\phi(x) + (1-\alpha)\phi(y)$, για κάθε $0 \le \alpha \le 1$ και $x, y \in I$–μπορείτε να υποθέσετε γνωστό ότι μια τέτοια ϕ είναι συνεχής). Υποθέτουμε επίσης ότι οι αναφερόμενες μέσες τιμές υπάρχουν, δηλ. ότι $\mathbb{E}[|X|], \mathbb{E}[|\phi(X)|] < \infty$.
Υπόδειξη: Κάντε το πρώτα για απλές ΤΜ X.