

Παραδώστε τις λύσεις στο μάθημα της Πέμπτης 12/3/2020. Γράφετε σύντομα και περιεκτικά.

1. Δείξτε ότι αν $K_N(x) = \sum_{k=-N}^N \left(1 - \frac{|k|}{N+1}\right) e^{ikx}$ τότε

$$K_N(x) = \frac{1}{N+1} \frac{\sin^2 \frac{(N+1)x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}}.$$

2. Αν $f \in L^1(\mathbb{T})$ και $N \in \mathbb{N}$ βρείτε τους συντελεστές Fourier της συνάρτησης $f(Nx)$ μέσω αυτών της $f(x)$.
3. Αν $f \in L^1(\mathbb{T})$ και $g \in L^\infty(\mathbb{T})$ δείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(nt) dt = \widehat{f}(0)\widehat{g}(0).$$

💡 Δείξτε το πρώτα για f τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Μετά χρησιμοποιήστε την πυκνότητα των τριγωνομετρικών πολυωνύμων στο $L^1(\mathbb{T})$. Η άσκηση 2 θα σας είναι χρήσιμη.