# Παραλία με μέτρο

Μιχάλης Κολουντζάκης,
Τμ. Μαθηματικών & Εφαρμ. Μαθηματικών, Πανεπ. Κρήτης,
16 Ιουλίου 2015

Το φυλλάδιο αυτό απευθύνεται σε όσους σκοπεύουν να πάρουν το μεταπτυχιακό μάθημα **Θεωρία Μέτρου** το επόμενο εξάμηνο (Φθινόπωρο 2015/16). Περιλαμβάνει μερικές ασκήσεις που αντιπροσωπεύουν ένα σημαντικό μέρος της προπτυχιακής ανάλυσης με την οποία θα πρέπει να είστε εξοικειωμένοι ώστε να μπορέσετε να παρακολουθήσετε το μάθημα με άνεση.

Συνιστώ λοιπόν να ξοδέψετε μερικές ώρες από τις διακοπές σας για το φυλλάδιο αυτό. Θα σας βοηθήσει να θυμηθείτε ορισμένα πράγματα και να καταλάβετε καλύτερα κάποια άλλα. Το να μπορείτε να λύσετε τις ασκήσεις αυτές με άνεση θα είναι μια πολύ καλή ένδειξη ότι θα τα πάτε καλά στο μάθημα. Στη διάθεσή σας για τυχόν ερωτήσεις (αν φυσικά με βρείτε καλοκαιριάτικα).

Καλές διακοπές.

**Πρόβλημα 1.** Αν $z = x + iy \in \mathbb{C}$ βρείτε τα πραγματικά και φανταστικά μέρη των μιγαδικών αριθμών
$$z^4,\ 1/z,\ \frac{z-1}{z+1},\ 1/z^2.$$

**Πρόβλημα 2.** Αν $a_j b_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, δείξτε την ταυτότητα
$$\left|\sum_{j=1}^n a_j b_j\right|^2 = \sum_{j=1}^n |a_j|^2 \cdot \sum_{j=1}^n |b_j|^2 - \sum_{1\le i\le j\le n} \left|a_i\overline{b_j} - a_j\overline{b_i}\right|^2.$$

**Πρόβλημα 3.** Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις
$$1, \cos(2\pi nx), \sin(2\pi nx), \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$
είναι ανά δύο ορθογώνιες στο διάστημα $[0, 1]$. Αυτό σημαίνει ότι αν $f, g$ είναι δύο οποιεσδήποτε, διαφορετικές, από αυτές τις συναρτήσεις τότε
$$\int_0^1 f(x)g(x)\,dx = 0.$$

**Πρόβλημα 4.** Για $x, y \in \mathbb{R}^n$ και $|x| = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}$ (το Ευκλείδιο μήκος του διανύσματος) δείξτε την ταυτότητα
$$|x + y|^2 + |x - y|^2 = 2|x|^2 + 2|y|^2,$$
και δώστε μια γεωμετρική ερμηνεία αυτής.

**Πρόβλημα 5.** Υπολογίστε το όριο της ακολουθίας $\sqrt{n^2+n}-n$.

**Πρόβλημα 6.** Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ικανοποεί τη σχέση $|f(x)-f(y)| \le \frac{1}{2}|x-y|$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ δείξτε ότι κάθε ακολουθία $x_n$ που ικανοποιεί την $x_{n+1} = f(x_n)$ συγκλίνει.

**Πρόβλημα 7.** Για ποιες τιμές των πραγματικών παραμέτρων $\alpha, \beta$ συγκλίνουν οι παρακάτω σειρές·

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}, \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}(\log n)^{-\beta}, \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=n}^{\infty} m^{-\alpha}$$

**Πρόβλημα 8.** Αν $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|a_n| < \infty, \sum_{n=-\infty}^{\infty}|b_n| < \infty$ και η ακολουθία $c_n, n \in \mathbb{Z}$, ικανοποιεί για κάθε $n \in \mathbb{Z}$

$$c_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k b_{n-k}$$

τότε ισχύει $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n| < \infty$.

**Πρόβλημα 9.** Δείξτε ότι οι ρητοί αριθμοί είναι αριθμήσιμο σύνολο, υπάρχει δηλ. απεικόνιση από το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών επί του συνόλου $\mathbb{Q}$ των ρητών. Το ίδιο δείξτε και για το σύνολο $\mathbb{Q}^2 = \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ όπως και για το σύνολο όλων των ακολουθιών $x_n$ από ρητούς αριθμούς που είναι τελικά 0.

Δείξτε όμως ότι το σύνολο $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ των ακολουθιών από 0 ή 1 δεν είναι αριθμήσιμο σύνολο.

**Πρόβλημα 10.** Έστω ένα σύνολο δεικτών $I$ και ανοιχτά μη κενά διαστήματα $(a_i, b_i), i \in I$. Αν αυτά είναι ανά δύο ξένα τότε το σύνολο $I$ είναι αριθμήσιμο.

Μια μονότονη συνάρτηση $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ έχει αριθμήσιμες το πλήθος ασυνέχειες (αν έχει).

Αν $q_n$, $n = 1, 2, \ldots$, είναι μια αρίθμηση των ρητών αριθμών, δείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \sum_{q_n < x} \frac{1}{n^2}$$

είναι αύξουσα και ασυνεχής ακριβώς στους ρητούς αριθμούς.

**Πρόβλημα 11.** Μια συνάρτηση $f : X \to Y$ ($X, Y$ μετρικοί χώροι) λέγεται συνεχής στο σημείο $x \in X$ αν για κάθε ακολουθία $x_n \to x$ ισχύει $f(x_n) \to f(x)$. Δείξτε ότι μια συνάρτηση $f : X \to Y$ είναι συνεχής στον $X$ (δηλ. είναι συνεχής για κάθε $x \in X$) αν και μόνο αν για κάθε ανοιχτό σύνολο $G \subseteq Y$ το σύνολο $f^{-1}(G) = \{x \in X : \ f(x) \in G\}$ είναι ανοιχτό.

**Πρόβλημα 12.** Ένα σύνολο $K$ σε ένα μετρικό χώρο $X$ λέγεται συμπαγές αν κάθε ανοιχτό κάλυμμά του έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα. Δηλαδή, αν τα σύνολα $G_i \subseteq X$, $i \in I$, είναι ανοιχτά και $K \subseteq \cup_{i\in I} G_i$ τότε υπάρχει φυσικός αριθμός $k$ και δείκτες $i_1, \ldots, i_k \in I$ τέτοιοι ώστε $K \subseteq G_{i_1} \cup \cdots \cup G_{i_k}$.

Δείξτε ότι αν $f : X \to Y$ είναι συνεχής και $K \subseteq X$ είναι συμπαγές τότε $f(K)$ είναι επίσης συμπαγές.

**Πρόβλημα 13.** Δείξτε ότι σύνθεση συναρτήσεων που είναι ομοιόμορφα συνεχείς είναι επίσης ομοιόμορφα συνεχής (διατυπώστε το με περισσότερη ακρίβεια και αποδείξτε το).

**Πρόβλημα 14.** Αν $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις δείξτε την ανισότητα Cauchy-Schwartz:

$$\left(\int_0^1 f(x)g(x)\,dx\right)^2 \le \int_0^1 f(x)^2\,dx \int_0^1 g(x)^2\,dx.$$

Διατυπώστε κατάλληλα και αποδείξτε την ανισότητα αυτή για την περίπτωση που οι συναρτήσεις παίρνουν μιγαδικές τιμές.

**Πρόβλημα 15.** Ποιες από τις παρακάτω ακολουθίες συναρτήσεων συγκλίνουν ομοιόμορφα στη συνάρτηση $F(x) = 0$ για $x \in (0,1)$;

$$f_n(x) = \frac{1}{nx},\ g_n(x) = \frac{1}{n(1-x)},\ h_n(x) = \frac{x}{n},\ w_n(x) = x^n.$$

**Πρόβλημα 16.** Ποιες από τις παρακάτω σειρές συναρτήσεων συγκλίνουν ομοιόμορφα για $x \in (0,1)$;

$$\sum_{n=1}^\infty x^n,\ \sum_{n=1}^\infty (x/2)^n,\ \sum_{n=1}^\infty \frac{\sin nx}{n^{5/2}},\ \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2 x}.$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση $S(x) = 1$ αν $x \in [0,1]$ και $S(x) = 0$ αλλιώς.

Το ίδιο ερώτημα για τις σειρές συναρτήσεων με πεδίο ορισμού ολόκληρο το $\mathbb{R}$:

$$\sum_{n=1}^\infty S(x-10n), \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} S(x-10n), \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} S(x-10n), \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} S(x/n), \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} S(x/n).$$

**Πρόβλημα 17.** Ας είναι $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ένας πίνακας. Δείξτε ότι υπάρχει πεπερασμένο $M > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ να ισχύει $|Ax| \le M|x|$, όπου $|x|$ παριστάνει το Ευκλείδιο μέτρο του διανύσματος $x$.

**Πρόβλημα 18.** Αν είναι $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση και $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ για $x \in [0,1]$, δείξτε ότι η παράγωγος $F'(x)$ υπάρχει για κάθε $x \in (0,1)$ και ισούται με $f(x)$.

**Πρόβλημα 19.** Κατασκευάστε μια ακολουθία συνεχών, μη αρνητικών συναρτήσεων $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε για κάθε $x \in [0,1]$ να ισχύει $f_n(x) \to 0$ αλλά $\int_0^1 f_n(x)\,dx \to \infty$.

Επίσης μια ακολουθία συνεχών, μη αρνητικών συναρτήσεων $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $\int_0^1 f_n(x)\,dx \to 0$ αλλά $\int_0^1 f_n(x)^2\,dx \to \infty$.

Επίσης μια ακολουθία συνεχών, μη αρνητικών συναρτήσεων $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $\int_0^1 f_n(x)\,dx \to 0$ αλλά για κάθε $x \in [0,1]$ να ισχύει $\limsup_{n\to\infty} f_n(x) = \infty$.

Επίσης μια ακολουθία συνεχών, μη αρνητικών, ομοιόμορφα φραγμένων (δηλ. από το ίδιο φράγμα όλες) συναρτήσεων $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $\lim_n f_n(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αλλά $\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,dx \to +\infty$.

**Πρόβλημα 20.** Ας είναι $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ το κλασματικό μέρος του αριθμού $x$. Αν $a \notin \mathbb{Q}$ δείξτε ότι η ακολουθία $\{na\}$, $n \in \mathbb{Z}$, είναι πυκνή στο $[0,1]$.

**Πρόβλημα 21.** Έστω $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$. Βρείτε ένα πολυώνυμο $p(x)$ με μιγαδικούς συντελεστές και βαθμό $\leq n$ τ.ώ. $p^{(k)}(0) = a_k$, για $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.