Πανεπιστήμιο Κρήτης, Τμ. Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών
Θεωρία Μέτρου (μεταπτυχιακό μάθημα), Φθινόπωρο 2015-16, Μιχ. Κολουντζάκης

Πρώτο Διαγώνισμα

Τετάρτη 2 Δεκμεβρίου 2015

Πρόβλημα 1. Αν $E \subseteq \mathbb{R}^d$ έχει πεπερασμένο μέτρο και $1 \le p_1 \le p_2 \le \infty$ δείξτε ότι

$$L^{p_2}(E) \subseteq L^{p_1}(E).$$

Δείξτε επίσης μια ανισότητα της μορφής

$$\|f\|_{p_1} \le C\|f\|_{p_2}, \ \ \forall f$$

όπου C είναι μια σταθερά που δεν εξαρτάται από την f αλλά μόνο, ενδεχομένως, από τα p_1, p_2, E, d.

Πρόβλημα 2. Δείξτε ότι αν $1 \le p_1, p_2 \le \infty$ και $L^{p_1}(\mathbb{R}) \subseteq L^{p_2}(\mathbb{R})$ τότε $p_1 = p_2$.

Πρόβλημα 3. Αν $f \in L^1(\mathbb{R})$ και $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ δείξτε ότι η συνέλιξή τους

$$f * g(x) = \int f(x-t)g(t)\,dt$$

είναι καλώς ορισμένη και ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Πρόβλημα 4. Δώστε παράδειγμα μιας συνάρτησης $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ που να είναι συνεχής στο $[0,1]$ αλλά όχι φραγμένης κύμανσης στο διάστημα αυτό. Υπάρχει τέτοια f που να είναι, επιπλέον, και παραγωγίσιμη παντού στο $[0,1]$ (στα άκρα μόνο πλευρικές παραγώγους);

Πρόβλημα 5. Έστω $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \ge 0 \\ 0 & \text{αν } x < 0 \end{cases}.$$

Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} u(x - r_n),$$

όπου $r_1, r_2, \ldots$ είναι μια αρίθμηση των ρητών, είναι αύξουσα και ασυνεχής ακριβώς στους ρητούς.

• Διάρκεια 2 ώρες με κλειστές όλες τις σημειώσεις/βιβλία.