Πανεπιστήμιο Κρήτης, Τμ. Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών
Θεωρία Μέτρου, Φθινόπωρο 2015-16, Μιχ. Κολουντζάκης

Υπόδειγμα πρώτου διαγωνίσματος

Παρασκευή 27 Νοεμβρίου 2015

Πρόβλημα 1. Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις και $0 < \lambda_n \to \infty$ τ.ώ.

$$\sum_{n\geq 1} m\{|f_n| \geq \lambda_n\} < \infty.$$

Δείξτε ότι $\limsup_{n\to\infty} \frac{f_n(x)}{\lambda_n} \leq 1$ σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Πρόβλημα 2. Το μετρήσιμο σύνολο $E \subseteq \mathbb{R}^d$ έχει πεπερασμένο μέτρο και οι μετρήσιμες $f_n : E \to \mathbb{C}$ είναι φραγμένες κατά σημείο, ισχύει δηλ. για κάθε $x \in E$ ότι

$$\sup_n |f_n(x)| < \infty.$$

Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει σύνολο $A \subseteq E$ με μέτρο $m(A) < \epsilon$ και $M \in (0, +\infty)$ ώστε για κάθε $x \in E \setminus A$ και κάθε n να ισχύει $|f_n(x)| \leq M$. Είναι δηλ. οι f_n ομοιόμορφα φραγμένες αν εξαιρέσουμε ένα σύνολο οσοδήποτε μικρού μέτρου.

Πρόβλημα 3. Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι ολοκληρώσιμη δείξτε αν η $\widehat{f}(\xi) = \int e^{-2\pi i \xi x} f(x)\, dx$ είναι συνεχής.

Πρόβλημα 4. Αν $E \subseteq \mathbb{R}$ έχει θετικό μέτρο τότε το σύνολο $E - E = \{x - y : x, y \in E\}$ περιέχει διάστημα.

Πρόβλημα 5. Έστω $E \subseteq (0, 1)$ ένα μετρήσιμο σύνολο. Αν κάθε σημείο του $(0, 1)$ είναι σημείο πυκνότητας του E δείξτε ότι $m(E) = 1$.

• **Διάρκεια 2 ώρες.**