Πανεπιστήμιο Κρήτης, Τμ. Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών
Θεωρία Μέτρου, Φθινόπωρο 2015-16, Μιχ. Κολουντζάκης

## Υπόδειγμα τελικού διαγωνίσματος

Δευτέρα 28 Δεκεμβρίου 2015

**Πρόβλημα 1.** Έστω χώροι με νόρμα $X$ και $Y$ και γραμμικός τελεστής $f : X \to Y$. Δείξτε ότι η απεικόνιση $f$ είναι συνεχής παντού στο $X$ αν και μόνο αν είναι συνεχής στο $0$. Επίσης ότι αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν η απεικόνιση $f$ είναι φραγμένη, υπάρχει δηλ. πεπερασμένη θετική σταθερά $C$ τέτοια ώστε

$$\|f(x)\| \le C\|x\|, \quad \text{για κάθε } x \in X.$$

**Πρόβλημα 2.** Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμο σύνολο με $m(E) > 0$. Χωρίς να χρησιμοποιήσετε το θεώρημα του Lebesgue (σημεία πυκνότητας κλπ) δείξτε ότι για καθε $\epsilon > 0$ υπάρχει διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$m(E \cap I) \ge (1-\epsilon)m(I).$$

**Πρόβλημα 3.** Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία μετρησίμων $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε

(1) $f_n(x) \ge 0$, για κάθε $x \in [0,1]$,
(2) $\lim_n f_n(x) = 0$, για κάθε $x \in [0,1]$,
(3) $\lim_n \int f_n = 1$, και
(4) $\lim_n \int f_n^2 = +\infty$.

**Πρόβλημα 4.** Έστω ότι $f$ ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$ και ότι

$$g(x) = \int_{[x,1]} \frac{f(t)}{t} dt.$$

Δείξτε ότι και η $g$ είναι ολοκληρώσιμη και ότι

$$\int_{[0,1]} g = \int_{[0,1]} f.$$

**Πρόβλημα 5.** Αν $f : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ είναι ολοκληρώσιμη δείξτε ότι

$$\int f = \int_0^\infty m(\{x : f(x) > t\})\, dt.$$

**Πρόβλημα 6.** Αν $S$ είναι ένας γραμμικός υπόχωρος (όχι κατ' ανάγκη κλειστός) ενός χώρου Hilbert, δείξτε ότι ο $(S^\perp)^\perp$ είναι ο μικρότερος κλειστός υπόχωρος του χώρου που περιέχει τον $S$.

- **Διάρκεια 3 ώρες.**