

Τελικό διαγώνισμα, 4 Φεβρουαρίου 2013

1. Πάνω σε έναν κυκλικό αυτοκινητόδρομο υπάρχουν n σταθμοί ανεφοδιασμού. Η συνολική ποσότητα βενζίνης που έχουν οι n σταθμοί είναι αρκετή ώστε ένα αυτοκίνητο να μπορεί να διαγράψει όλη την διαδρομή (δηλαδή έναν πλήρη κύκλο) με αυτήν. Θεωρούμε ότι το αυτοκίνητο μπορεί να αποθηκεύσει απεριόριστη ποσότητα βενζίνης. Δείξτε ότι υπάρχει κάποιος από τους σταθμούς ανεφοδιασμού, τέτοιος ώστε αν το αυτοκίνητο ξεκινήσει από αυτόν θα μπορεί να επιστρέψει σε αυτόν (κινούμενο πάντα προς την ίδια κατεύθυνση).

2. Το σύνολο $A \subseteq \{0, 1, \dots, N\}$ έχει την ιδιότητα ότι όλα τα αθροίσματα των στοιχείων του ανά δύο είναι διαφορετικά. Δείξτε ότι $|A| \leq C\sqrt{N}$, όπου C είναι μια θετική σταθερά που δεν εξαρτάται από το N ή το A .

3. Ας είναι $1 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_N$ φυσικοί αριθμοί, $c_1, c_2, \dots, c_N \in \mathbb{C}$ και

$$f(x) = \sum_{j=1}^N c_j e^{2\pi i \lambda_j x}.$$

Δείξτε ότι υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ τ.ώ. $|f(x)| \geq \sqrt{\sum_{j=1}^N |c_j|^2}$.

Υπόδειξη: Αν ορίσουμε το εσωτερικό γινόμενο $\langle g, h \rangle = \int_0^1 g(x) \overline{h(x)} dx$ τότε οι συναρτήσεις $e^{2\pi i \lambda_j x}$ είναι ανά δύο ορθογώνιες.

4. Στο επίπεδο βρίσκονται ζωγραφισμένα κάποια "ομοιομορφικά οχτάρια".

Ένα ομοιομορφικό οχτάρι είναι μια κλειστή καμπύλη στο επίπεδο που αυτοτέμνεται μια φορά και χωρίζει το επίπεδο σε τρία μέρη.

Τα οχτάρια αυτά δεν αλληλοτέμνονται. Δείξτε ότι το πλήθος τους είναι αριθμήσιμο.

5. Ένας μιγαδικός αριθμός λέγεται αλγεβρικός αν υπάρχει ένα πολυώνυμο με ακέρατους συντελεστές του οποίου είναι ρίζα. Δείξτε ότι υπάρχουν μιγαδικοί αριθμοί που δεν είναι αλγεβρικοί.

ΚΑΝΟΝΕΣ:

Διάρκεια διαγωνίσματος: 3 ώρες. Δεν επιτρέπεται η χρήση σημειώσεων, βιβλίων ή υπολογιστικών μηχανών.

Οι αποδείξεις σας να είναι πλήρεις και να φαίνεται καθαρά τι υποθέτετε ως γνωστό. Έχει μεγάλη σημασία και το πώς γράφετε.