Πρώτη Ομάδα Ασκήσεων, 9 Οκτωβρίου 2013

Πρόβλημα 1. Ενα ορθογώνιο τραπέζι έχει τοποθετημένα επάνω του 100 ίδια στρογγυλά κέρματα (ένα κέρμα θεωρείται τοποθετημένο πάνω στο τραπέζι ανν το κέντρο του βρίσκεται πάνω στο τραπέζι–όχι κατάνάγκη όλο το κέρμα) με τέτοιο τρόπο ώστε να μη να μπεί άλλο κέρμα (ίδιο με τα αρχικά) χωρίς να επικαλύπτει, ή πλήρως, κάποιο από τη ήδη τοποθετημένα.

Δείξτε ότι μπορεί κανείς να καλύψει πλήρως το τραπέζι με 400, ενδεχομένως αλληλοκαλυπτόμενα, κέρματα.

Πρόβλημα 2. Ενα σύνολο σημείων

$$\mathcal{P} = \{x_1, \ldots, , x_n\} \subseteq [0,1] \times [0,1]$$

έχει την ιδιότητα ότι κάθε σημείο του $[0,1]\times[0,1]$ απέχει απόσταση το πολύ ϵ από κάποιο σημείο του $\mathcal{P}$. Δείξτε ότι $n \geq 1/(\pi\epsilon^2)$.

Πρόβλημα 3. Δίνεται μία άπειρη ακολουθία ορθογωνίων

$$R_j = [a_j, b_j] \times [c_j, d_j] \subseteq [0,1] \times [0,1], \quad j = 1, 2, \ldots. \tag{1}$$

Δείξτε ότι μπορούμε να καλύψουμε το επίπεδο χρησιμοποιώντας ένα αντίγραφο από κάθε R_j μεταφερμένο σε κάποια θέση $x_j \in \mathbb{R}^2$ αν και μόνο αν το άθροισμα εμβαδών των R_j είναι άπειρο (η μία κατεύθυνση είναι προφανής).

Δείξτε επίσης ότι η συνθήκη (1) δεν μπορεί να παραλειφθεί, δηλ. ότι υπάρχει μια ακολουθία από R_j με άπειρο εμβαδό, που δεν έχουν όμως φραγμένες διαστάσεις, που δεν μπορεί να καλύψει το επίπεδο.

Πρόβλημα 4. Δίδεται ένα ορθογώνιο T με τις πλευρές του παράλληλες προς τους άξονες του επιπέδου. Υποθέτουμε πως μπορούμε να γράψουμε το T σαν ένωση κάποιων ορθογωνίων $T_1, \ldots, T_n$, επίσης με τις πλευρές παράλληλες προς τους άξονες, και με ξένα εσωτερικά. Υποθέτουμε επίσης πως για κάθε T_i η μία ή η άλλη πλευρά του έχει ακέραιο μήκος. Δείξτε ότι η μια ή η άλλη πλευρά του T έχει ακέραιο μήκος.

Πρόβλημα 5. Μια απλή κλειστή πολυγωνική γραμμή σας περιγράφεται μέσω των συντεταγμένων των κορυφών της $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ κατά τη θετική φορά.

(α) Βρείτε ένα τύπο για το εμβαδό του πολυγώνου ο οποίος να χρησιμοποιεί μόνο τις τέσσερεις αλγεβρικές πράξεις $(+, -, \times, /)$.

(β) Ομοίως βρείτε ένα τύπο για το κέντρο βάρους του πολυγώνου.

Πρόβλημα 6. Γράψτε την περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου σα ξένη ένωση δύο συνόλων A και B ώστε να είναι δυνατό με κάποια στερεά κίνηση να μετακινήσετε τα A και B με τρόπο ώστε να παραμένουν ξένα και η ένωσή τους να είναι ένας κύκλος μείον ακριβώς ένα σημείο.

Πρόβλημα 7. Κόβουμε τη μοναδιαία σφαίρα στο $\mathbb{R}^3$ με δύο παράλληλα επίπεδα που έχουν απόσταση μεταξύ τους ίση με d. Δείξτε ότι η επιφάνεια της σφαίρας ανάμεσα στα δύο επίπεδα εξαρτάται μόνο από το d και όχι από τη σχετική θέση σφαίρας και ζεύγους επιπέδων.

Πρόβλημα 8. Να βρεθεί μια συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \to [0,1]$ τέτοια ώστε για κάθε $y \in [0,1]$ να υπάρχουν άπειρα $x \in [0,1]$ με $f(x) = y$.

Πρόβλημα 9. Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$. Μια συλλογή από διαστήματα I_j, $j = 1, 2, \ldots$, αποτελεί μια κάλυψη του E αν $E \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$. Το *μήκος* της κάλυψης είναι ο αριθμός (πεπερασμένος ή $+\infty$) $L = \sum_{j=1}^{\infty} |I_j|$, όπου $|I|$ συμβολίζει το μήκος του διαστήματος I. Συμβολίζουμε με $\mu^*(E)$ το infimum των αριθμών L, για όλες τις δυνατές καλύψεις του συνόλου E. Ο αριθμός $\mu^*(E)$ ονομάζεται *εξωτερικό μέτρο* του συνόλου E.

(α) Δείξτε αν E είναι αριθμήσιμο τότε $\mu^*(E) = 0$.

(β) Δείξτε ότι η συνολοσυνάρτηση μ^* είναι *υποπροσθετική*, δηλ., για κάθε δύο σύνολα A και B έχουμε

$$\mu^*(A \cup B) \leq \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

(γ) Κατασκευάσετε ένα υπεραριθμήσιμο σύνολο με μέτρο 0.