Τρίτη Ομάδα Ασκήσεων, 29 Νοεμβρίου 2013

Πρόβλημα 1. Μια εταιρεία παραγωγής μαγικών ειδών σας ζητάει να εκτιμήσετε την ποιότητα της νέας γυάλινης σφαίρας που έχει κατασκευάσει, και ειδικότερα σας ζητάει να αποφασίσετε από ποιον όροφο του 36-όροφου κτηρίου της πρέπει να πέσει για να σπάσει.Για το σκοπό αυτό σας διαθέτει ακριβώς δύο πανομοιότυπες γυάλινες σφαίρες.

Εσείς πρέπει λοιπόν να αποφασίσετε ποιο είναι το ελάχιστο $n \ge 1$ τέτοιο ώστε αν η γυάλινη σφαίρα πέσει από τον n-οστό όροφο σπάει αλλά αν πέσει από τον $(n-1)$-όροφο τότε δε σπάει.

Ένας προφανής τρόπος να το κάνετε αυτό χρησιμοποιώντας μάλιστα μόνο τη μια σφαίρα είναι να ανεβαίνετε τους ορόφους έναν-έναν και από κάθε όροφο να ρίχνετε τη σφαίρα μέχρι να σπάσει.

Όμως αυτός ο όροφος παίρνει εν γένει πολλές δοκιμές.

Προσπαθείστε να το κάνετε με όσο λιγότερες δοκιμές μπορείτε.

Πρόβλημα 2. Σας δίνεται ένα άπειρο πλήθος από ίδια ορθογώνια τούβλα, διαστάσεων $30\times10\times10$ cm. Δείξτε ότι μπορείτε να φτιάξετε μία στήλη από αυτά η οποία

- να ισορροπεί,
- να έχει ένα τούβλο σε κάθε οριζόντιο επίπεδο και
- προβαλλόμενη κατακόρυφα κάτω να φτάνει 100 μ μακριά.

Προσπαθείστε να δώσετε μια λύση χωρίς πράξεις, στηριζόμενοι σε "φυσικά" επιχειρήματα.

Πρόβλημα 3. Ας είναι $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ ένας άρρητος πραγματικός και $A = \{n\alpha : n \in \mathbb{Z}\}$ το σύνολο όλων των ακεραίων πολλαπλασίων του. Συμβολίζουμε με $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ το κλασματικό μέρος του πραγματικού x. Δείξτε ότι το σύνολο

$$\{\{x\} : x \in A\}$$

είναι πυκνό στο $[0,1]$.

Πρόβλημα 4. Δείξτε ότι ανάμεσα σε κάθε δυο θετικούς πραγματικούς υπάρχει ένας αριθμός τής μορφής $2^n\cdot 3^m$, όπου $n, m \in \mathbb{Z}$.

Πρόβλημα 5. Έστω $\alpha > 0$ πραγματικός αριθμός. Αν θέλουμε να προσεγγίσουμε τον α με ρητούς αριθμούς m/n τότε, εύκολα μπορεί κανείς να δει ότι, μπορούμε για κάθε n να βρούμε ένα m τ.ώ. $\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| \le \frac{1}{n}$.

Δείξτε ότι υπάρχουν οσοδήποτε μεγάλοι φυσικοί αριθμοί n, και φυσικοί m με $1 \le m < n$ τ.ώ.

$$\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| \le \frac{1}{n^2}.$$

Πρόβλημα 6. Γνωρίζουμε ότι αν μας δώσουν n διαφορετικούς πραγματικούς αριθμούς $x_1, \ldots, x_n$ και n πραγματικές τιμές $v_1, \ldots, v_n$ τότε μπορούμε να βρούμε ένα πολυώνυμο βαθμού το πολύ $n-1$

$$p(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \cdots + \lambda_{n-1}x^{n-1}$$

το οποίο παρεμβάλλει τις τιμές v_i στα σημεία x_i:

$$p(x_i) = v_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Ένας άλλος τρόπος να πούμε το ίδιο πράγμα είναι ότι πάντα (για κάθε x_i, v_i, x_i διαφορετικά) μπορούμε να βρούμε ένα γραμμικό συνδυασμό των συναρτήσεων

$$u_1(x) = 1, u_2(x) = x, u_3(x) = x^2, \ldots, u_n(x) = x^{n-1}$$

που παίρνει τις τιμές v_i στα x_i.

Δείξτε ότι αυτό δεν είναι δυνατό στο επίπεδο: για $n \ge 2$ δεν υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις $u_1, \ldots, u_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε για κάθε n σημεία $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^2$ και κάθε n τιμές $v_1, \ldots, v_n \in$

$\mathbb{R}$ να υπάρχει γραμμικός συνδυασμός
$$F(x) = \lambda_1 u_1(x) + \cdots + \lambda_n u_n(x)$$
που να παρεμβάλει: $F(x_i) = v_i$ για $i = 1, 2, \ldots, n$.

Πρόβλημα 7. Έχουμε ένα $m \times n$ πίνακα με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς. Σας επιτρέπεται σε κάθε βήμα να πολλαπλασιάζετε κάθε γραμμή ή στήλη του πίνακα με -1 (να αλλάζετε δηλ. όλα τα πρόσημα σε αυτή τη γραμμή ή στήλη). Δείξτε ότι μπορείτε με αυτό τον τρόπο να πετύχετε κάθε γραμμή και κάθε στήλη του πίνακα να έχει άθροισμα ≥ 0.

Πρόβλημα 8. Έχουμε κάποια διανύσματα $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^d$ με Ευκλείδιο μήκος $|v_j| = 1$. Δείξτε ότι μπορούμε να επιλέξουμε πρόσημα $\epsilon_1 = \pm 1, \ldots, \epsilon_n = \pm 1$ τέτοια ώστε αν
$$u = \epsilon_1 v_1 + \cdots + \epsilon_n v_n$$
τότε να ισχύει $|u| \leq \sqrt{n}$. Επίσης μπορούμε να τα επιλέξουμε ώστε να ισχύει $|u| \geq \sqrt{n}$.

Πρόβλημα 9. Ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο περιέχεται μέσα σ' ένα άλλο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο. Τα δύο παραλληλεπίπεδα δεν είναι κατ' ανάγκη παράλληλα μεταξύ τους.

Δείξτε ότι το άθροισμα των διαστάσεων του μέσα (μήκος + πλάτος + ύψος) είναι μικρότερο από το άθροισμα διαστάσεων του έξω.

Πρόβλημα 10. Δείξτε ότι αν $a > 0$ τότε υπάρχει ακολουθία φυσικών αριθμών
$$0 < n_1 < n_2 < \cdots$$
ώστε να ισχύει $a = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{n_j}$.

Πρόβλημα 11. Λέμε ότι ένα σύνολο A εμφυτεύεται στο σύνολο B αν υπάρχει μια 1-1 συνάρτηση $f : A \to B$. Δείξτε ότι αν το A εμφυτεύεται στο B και το B εμφυτεύεται στο A τότε υπάρχει μια 1-1 και επί συνάρτηση $F : A \to B$.

Πρόβλημα 12. Έστω $0 < n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ διαφορετικοί θετικοί ακέραιοι. Δείξτε ότι
$$\max_{x \in [0, 2\pi]} |\sin n_1 x + \sin n_2 x + \cdots + \sin n_k x| \geq C\sqrt{k},$$
όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά (για παράδειγμα $C = 10^{-2}$ σίγουρα είναι σωστό) που δεν εξαρτάται από το k ή τους ακεραίους n_j.