Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση αντιγραφής ή πρόθεσης αντιγραφής επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ΄ ελάχιστον, ο αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως πρόθεση αντιγραφής.

Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμοσμενων Μαθηματικων
«Θέματα Ανάλυσης: Σεμινάριο Προβλημάτων»

Χειμερινό Εξάμηνο 2016-17 —- Διδάσκων: Μιχάλης Κολουντζάκης

Τελικό Διαγώνισμα

23 Ιαν. 2017

Πρόβλημα 1. Σε μια συγκέντρωση βρίσκονται N άνθρωποι. Ανταλλάσσονται χειραψίες ανάμεσά τους (όχι αναγκαστικά όλοι με όλους). Δείξτε ότι υπάρχουν δύο από αυτούς που κάνουν τον ίδιο αριθμό χειραψιών.

Πρόβλημα 2. Από μια συνηθισμένη 8×8 σκακιέρα έχουμε αφαιρέσει την πάνω αριστερά και την κάτω δεξιά γωνία (απομένουν δηλ. 62 τετράγωνα). Μπορείτε να καλύψετε αυτή τη σκακιέρα με ντόμινα (ζεύγη δηλ. από τετράγωνα που έχουν μια κοινή πλευρά) που όμως δεν επιτρέπεται να αλληλοεπικαλύπτονται;

Πρόβλημα 3. Δείξτε ότι κάθε φυσικός αριθμός $n \geq 12$ μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός του 4 και του 5 με μη αρνητικούς ακέραιους συντελεστές.

Πρόβλημα 4. Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε δύο υποσύνολα $A, B \subseteq \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ τέτοια ώστε $A \subseteq B$;

Πρόβλημα 5. Βρείτε μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $f_n : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ τέτοιες ώστε

$$\lim_n \int_0^\infty f_n(x)\, dx = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_n \left(\sup_{x \geq 0} f_n(x) \right) = 0.$$

Πρόβλημα 6. Δείξτε ότι το πολυώνυμο δύο μεταβλητών $p(x, y) = (xy - 1)^2 + x^2$ είναι αυστηρά θετικό για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ και ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ τέτοιο ώστε $p(x, y) \leq \epsilon$.

Πρόβλημα 7. Αν τα σύνολα $A_1, A_2, \ldots$ είναι αριθμήσιμα, δείξτε ότι και το σύνολο $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ είναι αριθμήσιμο.

Πρόβλημα 8. Δείξτε ότι η ακολουθία

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n$$

είναι φραγμένη και συγκλίνει (βάση του λογαρίθμου το e).

Πρόβλημα 9. Αν N σημεία $x_1, x_2, \ldots, x_N \in [0, 1]^2$ είναι τέτοια ώστε για κάθε σημείο $x \in [0, 1]^2$ υπάρχει κάποιο $i = 1, 2, \ldots, n$ με $|x - x_i| \leq r$ τότε δείξτε ότι $N \geq \frac{1}{\pi r^2}$.

Διάρκεια διαγωνίσματος: 3 ώρες. Όλες οι σημειώσεις πρέπει να είναι κλειστές.
Όλες οι απαντήσεις σας πρέπει να είναι πλήρως αιτιολογημένες.