Πανεπιστημιο Κρητησ – Τμημα Μαθηματικων

Θέματα Ανάλυσης: Σεμινάριο Προβλημάτων

Μιχάλης Κολουντζάκης – Εαρινό εξάμηνο 1999-2000

ΠΡΟΟΔΟΣ

1. Έστω G ένα πεπερασμένο κατευθυνόμενο γράφημα με σύνολο κορυφών V και σύνολο ακμών E. Ένα *μονοπάτι* στο G είναι μια πεπερασμένη ακολουθία ακμών (όχι κατ' ανάγκη διαφορετικών) $e_1, e_2, \ldots, e_n$, που είναι τέτοιες ώστε για κάθε i η δεύτερη κορυφή της ακμής e_i είναι η πρώτη κορυφή της ακμής e_{i+1}. Δείξτε ότι το σύνολο όλων των πεπερασμένων μονοπατιών στο G, οποιουδήποτε μήκους, είναι αριθμήσιμο. Περιγράψτε δηλ. μια διαδικασία απαρίθμησης όλων των μονοπατιών με πεπερασμένο μήκος.

2. Αν A είναι ένας $n \times n$ πίνακας το *ίχνος*, $tr(A)$, του A ορίζεται ως $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$. Δείξτε ότι

$$tr(AB) = tr(BA)$$

για οποιουσδήποτε δύο $n \times n$ πίνακες A και B.

3. Ένα σημείο P βρίσκεται στο εσωτερικό ενός τετραέδρου T του οποίου η περιγεγγραμμένη σφαίρα έχει ακτίνα 1. Δείξτε ότι το P απέχει απόσταση μικρότερη ή ίση του 1 από κάποια κορυφή του T.

4. Έστω $E \subseteq (0,1)$. Μια συλλογή από διαστήματα I_j, $j = 1, 2, \ldots$, αποτελεί μια *κάλυψη* του E αν $E \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$. Το *μήκος* της κάλυψης είναι ο αριθμός (πεπερασμένος ή $+\infty$) $L = \sum_{j=1}^{\infty} |I_j|$, όπου $|I|$ συμβολίζει το μήκος του διαστήματος I. Συμβολίζουμε με $\mu^*(E)$ το infimum των αριθμών L, για όλες τις δυνατές καλύψεις του συνόλου E. Ο αριθμός $\mu^*(E)$ ονομάζεται *εξωτερικό μέτρο* του συνόλου E.

Δείξτε ότι αν $\mu^*(E) > 0$ τότε υπάρχει διάστημα $(a, b) \subseteq (0, 1)$ τέτοιο ώστε

$$\mu^* \left(E \cap (a, b)\right) \geq 0.9(b - a).$$

5. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί κανείς να ανέβει n σκαλοπάτια αν με κάθε βήμα ανεβαίνει ένα ή δύο σκαλοπάτια;

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες. Όλες οι σημειώσεις πρέπει να είναι κλειστές. Καλή επιτυχία.

Ηράκλειο, 21 Μαρ. 2000