ΣΕΜΙΝΑΡΙΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ
Προβλήματα κάλυψης
3 Μαρτίου, 1998

1. Ενα σύνολο σημείων
$$\mathcal{P} = \{x_1, \ldots, , x_n\} \subseteq [0,1] \times [0,1]$$
έχει την ιδιότητα ότι κάθε σημείο του $[0,1] \times [0,1]$ απέχει απόσταση το πολύ ϵ από κάποιο σημείο του $\mathcal{P}$. Δείξτε ότι
$$n \geq \frac{1}{\pi \epsilon^2}.$$

2. Δίνεται μια οικογένεια $\mathcal{F}$ από (κλειστούς) δίσκους στο επίπεδο (όχι αναγκαστικά της ίδιας ακτίνας) με την ιδιότητα ότι κανένας δίσκος της $\mathcal{F}$ δεν περιέχει το κέντρο ενός άλλου δίσκου της $\mathcal{F}$. Δείξτε ότι κάθε σημείο του επιπέδου περιέχεται το πολύ σε 5 δίσκους.

3. Εστω $\Omega \subseteq [0,1] \times [0,1]$ ένα σύνολο εμβαδού α και $\mathcal{C} = \{Q_1, \ldots, Q_n\}$ μια συλλογή από τετράγωνα διαφόρων διαστάσεων των οποίων η ένωση καλύπτει το Ω.
(a) Αν ο Q_1 είναι το μεγαλύτερο τετράγωνο της $\mathcal{C}$, δείξτε ότι το εμβαδό του Ω που περιέχεται στην ένωση των τετραγώνων της $\mathcal{C}$ που τέμνουν τον Q_1 φράσσεται άνω από $10|Q_1|$. (Με $|E|$ συμβολίζουμε το εμβαδό του συνόλου E.)
(b) Δείξτε ότι μπορούμε να επιλέξουμε ένα υποσύνολο
$$\mathcal{C}_1 = \{Q_{j_1}, \ldots, Q_{j_k}\} \subseteq \mathcal{C}$$
από ξένα ανά δύο τετράγωνα με άθροισμα εμβαδών τουλάχιστον $\alpha/20$.

Παρατήρηση: Οι σταθερές 10 και 20 στα παραπάνω δεν είναι οι καλύτερες δυνατές. Σημασία έχει ότι στο (b) μπορούμε να διαλέξουμε ξένα ανά δύο τετράγωνα με συνολικό εμβαδό τουλάχιστον όσο ένα προκαθορισμένο πολλαπλάσιο του εμβαδού του Ω.

4. Δίνεται μία άπειρη ακολουθία ορθογωνίων
$$R_j = [a_j, b_j] \times [c_j, d_j] \subseteq [0,1] \times [0,1], \quad j = 1, 2, \ldots. \tag{1}$$
Δείξτε ότι μπορούμε να καλύψουμε το επίπεδο χρησιμοποιώντας ένα αντίγραφο από κάθε R_j μεταφερμένο σε κάποια θέση $x_j \in \mathbb{R}^2$ αν και μόνο αν το άθροισμα εμβαδών των R_j είναι άπειρο (η μία κατεύθυνση είναι προφανής).

Δείξτε επίσης ότι η συνθήκη (1) δεν μπορεί να παραλειφθεί, δηλ. ότι υπάρχει μια ακολουθία από R_j με άπειρο εμβαδό, που δεν έχουν όμως φραγμένες διαστάσεις, που δεν μπορεί να καλύψει το επίπεδο.

5. Ενα ορθογώνιο τραπέζι έχει τοποθετημένα επάνω του 100 ίδια στρογγυλά κέρματα (ένα κέρμα θεωρείται τοποθετημένο πάνω στο τραπέζι ανν το κέντρο του βρίσκεται πάνω στο τραπέζι–όχι κατ'ανάγκη όλο το κέρμα) με τέτοιο τρόπο ώστε να μη χωράει να μπει άλλο κέρμα (ίδιο με τα αρχικά) χωρίς να επικαλύπτει, μερικώς ή πλήρως, κάποιο από τη ήδη τοποθετημένα.

Δείξτε ότι μπορεί κανείς να καλύψει πλήρως το τραπέζι με 400, ενδεχομένως αλληλοκαλυπτόμενα, κέρματα.

6. Εστω μια οικογένεια δίσκων διαφόρων ακτίνων που είναι γνήσια υποσύνολα του ανοιχτού μοναδιαίου δίσκου και των οποίων η ένωση ισούται με τον ανοιχτό μοναδιαίο δίσκο. Δείξτε ότι το άθροισμα των ακτίνων των δίσκων αυτών είναι άπειρο αλλά το άθροισμα των εμβαδών τους μπορεί να είναι και πεπερασμένο.

7. Να βρείτε ένα υποσύνολο A του μοναδιαίου κύκλου $\{x \in \mathbb{R}^2 : \ |x| = 1\}$ που να μπορεί να απεικονιστεί σε ένα γνήσιο υποσύνολο του εαυτού του με μια στροφή του επιπέδου γύρω από το 0.