ΣΕΜΙΝΑΡΙΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ
#3: Προβλήματα για πολυώνυμα
9 Απριλίου, 1998

Συμβολισμοί: Για ένα δακτύλιο ή σώμα F συμβολίζουμε με $F[x_1, \ldots, x_n]$ το σύνολο όλων των πολυωνύμων στις μεταβλητές $x_1, \ldots, x_n$ με συντελεστές από το F. Το F για μας θα είναι $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$. Επίσης με $F(x_1, \ldots, x_n)$ συμβολίζουμε όλες τις ρητές συναρτήσεις (δηλ. πηλίκα πολυωνύμων) με συντελεστές από το F. Με (f, g) συμβολίζουμε το μέγιστο κοινό διαιρέτη των πολυωνύμων f και g.

1. (α) Εστω $f \in \mathbb{R}[x]$, με $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε $f(x) > \epsilon$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
(β) Κατασκευάστε ένα πολυώνυμο $f \in \mathbb{R}[x, y]$ που να μη μηδενίζεται πουθενά αλλά να παίρνει τιμές οσοδήποτε κοντά στο 0 θέλουμε.

2. Εστω $f \in \mathbb{C}[x]$, $\deg f = m$, με την ιδιότητα $f(n) \in \mathbb{Z}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι το πολυώνυμο μπορεί να γραφεί

$$f(x) = b_m \binom{x}{m} + b_{m-1} \binom{x}{m} + \cdots + b_1 \binom{x}{1} + b_0, \tag{1}$$

με $b_i \in \mathbb{Z}$, $i = 0, \ldots, m$, όπου $\binom{x}{k}$ ορίζεται ως $\frac{1}{k!} x(x-1)\cdots(x-k+1)$. Επίσης δείξτε ότι ένα πολυώνυμο της μορφής (1) έχει $f(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{Z}$ μόνο αν όλα τα b_i είναι ακέραια.

3. Η ρητή συνάρτηση $f \in \mathbb{C}(x)$ έχει την ιδιότητα $f(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{Q}$. Δείξτε ότι $f = p/q$, όπου $p, q \in \mathbb{Z}[x]$ και $(p, q) = 1$.

4. Το σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^d$ λέγεται πολυωνυμικό αν

$$A = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \quad f_1(x) = \cdots = f_k(x) = 0\},$$

για κάποια πολυώνυμα $f_i \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$, $i = 1, \ldots, k$.
Δείξτε ότι αν το A είναι πολυωνυμικό τότε υπάρχει φυσικός N και ένα πολυώνυμο $f \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_N]$ στο οποίο η κάθε μεταβλητή εμφανίζεται με βαθμό μέχρι 4 τέτοιο ώστε $A = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \ \exists y \in \mathbb{R}^N \ f(x, y) = 0\right\}$.

5. (α) $f \in \mathbb{C}[z]$ και έστω $H \subset \mathbb{C}$ ένα ημιεπίπεδο του μιγαδικού επιπέδου. Αν όλες οι ρίζες του f βρίσκονται στο H δείξτε ότι και όλες οι ρίζες του f' βρισκονται στο H.
(β) Αν όλες οι ρίζες του f βρίσκονται μέσα στο μοναδιαίο δίσκο $\{z : \ |z| \le 1\}$ δείξτε ότι το ίδιο συμβαίνει και για τις ρίζες του f'.

6. (α) (Gauss) Εστω $f \in \mathbb{Z}[x]$, $\deg f = n$, και $f = g \cdot h$ όπου τα $g, h \in \mathbb{Q}[x]$ έχουν βαθμό $< n$. Δείξτε ότι υπάρχουν $a, b \in \mathbb{Z}[x]$, με βαθμό $< n$ τέτοια ώστε $f = a \cdot b$ (δηλ., αν το f παραγοντοποιείται στο $\mathbb{Q}[x]$ τότε παραγοντοποιείται και στο $\mathbb{Z}[x]$).

7. (α) (Eisenstein) $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$, p πρώτος, $p \mid a_i$ (διαιρεί το a_i) για $0 \le i < n$, $p \nmid a_n$, $p^2 \nmid a_0$. Τότε το f είναι ανάγωγο πολυώνυμο στο $\mathbb{Q}[x]$ (δεν έχει δηλαδή γνήσιους διαιρέτες στο $\mathbb{Q}[x]$).
(β) Αν p πρώτος, δείξτε ότι το πολυώνυμο $f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{p-1}$ είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Q}[x]$ (υπόδειξη: εξετάστε το πολυώνυμο $f(x+1)$).

8. Αν οι $a_1, \ldots, a_n$ είναι διαφορετικοί ακέραιοι, δείξτε ότι το πολυώνυμο

$$f(x) = (x - a_1) \cdots (x - a_n) - 1$$

είναι ανάγωγο στο $\mathbb{Q}[x]$.