Μία πολύ σύντομη εισαγωγή στη θεωρία Γραφημάτων

Μιχάλης Ν. Κολουντζάκης

Ανοιξη 1998, για το μάθημα Διακριτά Μαθηματικά

---

§0. Βασικές έννοιες

0.1 Απλά γραφήματα

Ενα <u>απλό γράφημα</u> $G = (V, E)$ αποτελείται από ένα σύνολο κορυφών V και ένα σύνολο ακμών E, το οποίο είναι ένα σύνολο από <u>δισύνολα</u> του V. Συνηθίζουμε να παριστάνουμε ένα γράφημα αντιστοιχώντας ένα σημείο του επιπέδου σε κάθε κορυφή και τραβώντας μια γραμμή που ενώνει δυο κορυφές αν και μόνο αν αυτές ενώνονται με μια ακμή στο G.

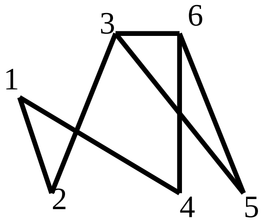


Figure 1: Ενα απλό γράφημα με 6 κορυφές και 7 ακμές.

Ετσι το γράφημα του Σχ. 1 έχει

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

και

$$E = \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}\}.$$

Αν δυο κορυφές u και v ενώνονται στο G θα γράφουμε συνήθως $u \sim v$. Ομοίως θα γράφουμε $e_1 \sim e_2$ για δύο ακμές e_1 και e_2 αν αυτές μοιράζονται μια από τις δυό τους κορυφές. Δύο τέτοιες κορυφές (αντ. ακμές) θα λέγονται γειτονικές ή γείτονες και το σύνολο των γειτόνων μιας κορυφής (αντ. ακμής) u θα λέγεται η γειτονιά του u και θα συμβολίζεται συνήθως με $N(u)$.

Βαθμός μιας κορυφής $u \in V$ (θα συμβολίζεται με $\deg u$) λέγεται το πλήθος των ακμών που έχουν την u ως άκρο τους. Δηλ. $\deg u = |N(u)|$.

Κανονικό ονομάζεται ένα γράφημα όταν όλες οι κορυφές του έχουν τον ίδιο βαθμό. Αν ο βαθμός είναι r τότε λέγεται r-κανονικό.

Μονοπάτι στο G θα λέγεται μια ακολουθία

$$u_1 \xrightarrow{e_1} u_2 \xrightarrow{e_2} \cdots \xrightarrow{e_{n-1}} u_n,$$

όπου η ακμή e_j συνδέει τις κορυφές u_j και u_{j+1}. Το πλήθος των ακμών που εμφανίζονται σε ένα μονοπάτι θα λέγεται μήκος του μονοπατιού. Ενα μονοπάτι σε ένα απλό γράφημα μπορούμε να το περιγράψουμε αναφέροντας μόνο τις κορυφές u_j αφού οι ακμές εννοούνται. Π.χ. στο γράφημα του σχήματος 1 το $1 \to 2 \to 3 \to 6$ είναι ένα μονοπάτι.

Κύκλωμα λέγεται ένα μονοπάτι που η τελευταία κορυφή είναι ίδια με την πρώτη. Στο σχήμα 1 το $1 \to 2 \to 3 \to 6 \to 4 \to 1$ είναι ένα κύκλωμα. Οταν θέλουμε να μιλήσουμε για κυκλώματα (δείτε παρακάτω για "δέντρα") χωρίς επαναλαμβανόμενες ακμές θα τα αποκαλούμε κύκλους.

0.2 Συνεκτικότητα

Θα λέμε ότι η κορυφή v είναι προσιτή από την κορυφή u αν υπάρχει μονοπάτι που να ξεκινάει από την u και να καταλήγει στην v. Είναι εύκολο να δειχτεί ότι η σχέση "v προσιτό από u" είναι μία σχέση ισοδυναμίας πάνω στο σύνολο V των κορυφών. Αρα το σύνολο V διαμερίζεται σε κλάσεις ισοδυναμίας που στην προκειμένη περίπτωση τις ονομάζουμε συνεκτικές συνιστώσες. Στο σχήμα 2 δείχνουμε ένα γράφημα του οποίου οι συνεκτικές συνιστώσες είναι οι $\{1\}$, $\{2, 3, 4\}$ και $\{5, 6, 7\}$. Ενα γράφημα ονομάζεται συνεκτικό αν

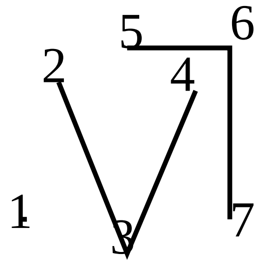


Figure 2: Ενα γράφημα με 3 συνεκτικές συνιστώσες.

έχει μόνο μία συνεκτική συνιστώσα, δηλ. κάθε κορυφή συνδέεται με κάθε άλλη μέσω ενός μονοπατιού. Το γράφημα του σχήματος 1 είναι συνεκτικό.

0.3 Διμερή γραφήματα

Ενα γράφημα $G = (V, E)$ θα ονομάζεται <u>διμερές</u> αν υπάρχει μια διαμέριση των κορυφών

$$V = A \cup B, \quad \text{με } A \cap B = \emptyset,$$

τέτοια ώστε κάθε οι γείτονες κάθε κορυφής του A ανήκουν στο B και οι γείτονες κάθε κορυφής του B ανήκουν στο A. Δεν υπάρχουν δηλ. ακμές από το A στο A ή από το B στο B.

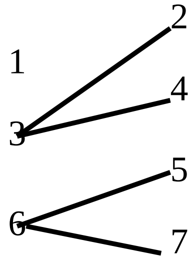


Figure 3: Ενα διμερές γράφημα.

Το γράφημα στο Σχ. 3 είναι διμερές με

$$A = \{1, 3, 6\}, \quad B = \{2, 4, 5, 7\}.$$

Παρατηρείστε ότι η διαμέριση $V = A \cup B$ δεν είναι μοναδική, μιά και θα μπορούσαμε κάλλιστα να είχαμε τοποθετήσει, για παράδειγμα, το 1 στο σύνολο B αντί για το A.

0.4 Υπογραφήματα

Ενα γράφημα $G' = (V', E')$ θα λέγεται υπογράφημα ενός γραφήματος $G = (V, E)$ αν $V' \subseteq V$ και $E' \subseteq E$. Με άλλα λόγια, το G' είναι υπογράφημα του G αν μπορούμε να το πάρουμε από το G αφαιρώντας κάποιες κορυφές και κάποιες ακμές (εννοείται εδώ ότι αν αποφασίσουμε να αφαιρέσουμε από το G μια κορυφή u αυτόματα διαγράφουμε και όλες τις ακμές που περιέχουν την u.

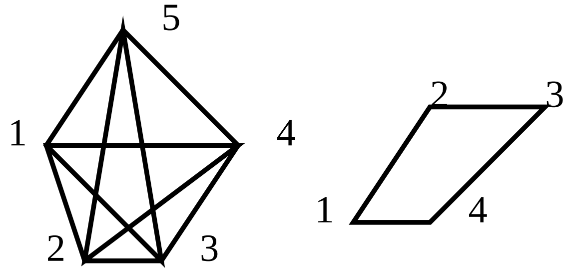


Figure 4: Το δεξιό γράφημα είναι υπογράφημα του αριστερού.

Στο Σχ. 4 το γράφημα δεξιά είναι υπογράφημα του γραφήματος αριστερά.

Μια ειδική κατηγορία υπογραφημάτων είναι τα λεγόμενα <u>επαγόμενα</u> υπογραφήματα, τα οποία προκύπτουν από ένα γράφημα διαγράφοντας απλώς ορισμένες κορυφές και χωρίς περιττές διαγραφές ακμών. Δηλ. αν $V' \subseteq V$, τότε το υπογράφημα του $G = (V, E)$ που επάγεται από το σύνολο κορυφών V είναι το γράφημα $G' = (V', E')$, με

$$E' = \{e = \{u, v\} \in E : \quad u, v \in V'\}.$$

Στο Σχ. 4 το γράφημα δεξιά δεν είναι επαγόμενο υπογράφημα αφού λείπουν οι ακμές $\{2, 4\}$ και $\{1, 3\}$. Αν τις προσθέσουμε σε αυτό τότε γίνεται το υπογράφημα του αριστερού γραφήματος που επάγεται από το σύνολο κορυφών $V = \{1, 2, 3, 4\}$.

0.5 Πίνακας συνδεσμολογίας

Ο απλούστερος ίσως τρόπος, αν και όχι πάντα ο πιο αποτελεσματικός από άποψη υπολογιστική, για να παραστήσει κανείς ένα απλό γράφημα είναι με το λεγόμενο πίνακα συνδεσμολογίας. Εστω $G = (V, E)$ ένα απλό γράφημα με $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Ο πίνακας συνδεσμολογίας A είναι τότε ένας $n \times n$ πίνακας με

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{αν } v_i \sim v_j, \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Βάζουμε δηλ. 1 στη θέση i, j αν και μόνο αν η i-οστή και η j-οστή κορυφή συνδέονται με κάποια ακμή. Από τον ορισμό προκύπτει αμέσως ότι ο πίνακας A είναι συμμετρικός και έχει 0 παντού πάνω στη διαγώνιο.

Με επαγωγή ως πρός k δείξετε ότι

Ασκηση 1 Ο πίνακας A^k, $k \geq 0$, έχει στη θέση i, j τον αριθμό s αν και μόνο αν ο αριθμός των μονοπατιών μήκους k από την κορυφή i στην j είναι ακριβώς s.

Παρατήρηση: Ενα μονοπάτι μήκους k από το u στο v μπορεί να επαναλαμβάνει ακμές. Για παράδειγμα, αν $u \sim u_1 \sim v$, τότε το μονοπάτι $u \to u_1 \to u \to u_1 \to v$ είναι ένα μονοπάτι από το u στο v μήκους 4.

0.6 Απόσταση πάνω σε γραφήματα

Θα ορίσουμε μια συνάρτηση $d : V \times V \to \mathbb{N}$ που θα έχει την έννοια της απόστασης. Αν η κορυφή u δεν είναι προσιτή από την κορυφή v τότε ορίζουμε $d(u, v) = d(v, u) = +\infty$. Αλλιώς ορίζουμε $d(u, v)$ να είναι το μήκος του ελάχιστου μονοπατιού που συνδέει τις u και v, δηλ. του μονοπατιού εκείνου με τις λιγότερες ακμές. Για παράδειγμα στο Σχ. 2 $d(2, 4) = d(5, 7) = 2$, $d(3, 2) = 1$, και $d(1, x) = +\infty$, $\forall x \in \{2, \ldots, 7\}$. Επίσης στο Σχ. 4, αριστερά, $d(u, v) = 1$, $\forall u, v \in \{1, \ldots, 5\}$, $u \neq v$.

Οπως κάθε φυσιολογική έννοια απόστασης στα Μαθηματικά, η συνάρτηση απόστασης που μόλις ορίσαμε ικανοποιεί τη λεγόμενη τριγωνική ανισότητα:

$$\forall u, v, w \in V : \quad d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v). \tag{1}$$

Για να δεί κανείς γιατί ισχύει αυτό, παρατηρείστε ότι αν πάρουμε οποιοδήποτε μονοπάτι από το u στο w και το συνεχίσουμε με ένα οποιοδήποτε μονοπάτι από το w στο v, παίρνουμε ένα μονοπάτι από το u στο v. Οι λεπτομέρειες της απόδειξης αφήνονται στον αναγνώστη.

Εχοντας ορίσει μια έννοια απόστασης, μπορούμε τώρα να μιλήσουμε για τη διάμετρο ενός γραφήματος $G = (V, E)$, που τη συμβολίζουμε με $\operatorname{diam} G$. Αυτή ορίζεται να είναι η μέγιστη απόσταση ανάμεσα σε δυό κορυφές του G:

$$\operatorname{diam} G = \max_{u, v \in V} d(u, v). \tag{2}$$

Είναι φανερό ότι ένα γράφημα G είναι συνεκτικό αν και μόνο αν $\operatorname{diam} G < \infty$. Για παράδειγμα, το αριστερό γράφημα του Σχ. 4 έχει διάμετρο 1 ενώ το δεξιό έχει διάμετρο 2.

Ασκηση 2 Μπορεί η διάμετρος ενός συνεκτικού γραφήματος με n κορυφές να είναι μεγαλύτερη από $n - 1$; Περιγράψτε όλα τα γραφήματα με n κορυφές και διάμετρο $n - 1$.

0.7 Ισομορφία γραφημάτων

Δύο γραφήματα $G = (V, E)$ και $G' = (V', E')$ λέγονται ισόμορφα αν υπάρχει μια 1-1 και επί $f : V \to V'$ τέτοια ώστε να έχουμε

$$\forall u, v \in V : \left(u \overset{G}{\sim} v \Longleftrightarrow f(u) \overset{G'}{\sim} f(v) \right). \tag{3}$$

Με άλλα λόγια, δυο γραφήματα λέγονται ισόμορφα αν μπορούμε να αντιστοιχίσουμε τις κορυφές τους 1-1 με τέτοιο τρόπο ώστε να διατηρείται η συνδεσμολογία. Για παράδειγμα, τό γράφημα του Σχ. 2 και το γράφημα του Σχ. 3 είναι ισόμορφα, και μάλιστα με $f(i) = i$.

Η απεικόνιση f (που ονομάζεται ισομορφισμός) δεν είναι μοναδικά καθορισμένη και ούτε είναι συνήθως προφανής η ύπαρξή της. Π.χ. η απεικόνιση f από το γράφημα του Σχ. 2 στο γράφημα του Σχ. 3 που έχει

$$f(1) = 1, f(2) = 5, f(3) = 6, f(4) = 7, f(5) = 4, f(6) = 3, f(7) = 2,$$

είναι κι αυτή ένας ισομορφισμός.

Οσον αφορά τη θεωρία γραφημάτων, δύο ισόμορφα γραφήματα συνήθως δεν τα ξεχωρίζουμε μεταξύ τους. Π.χ. θα θεωρούμε ένα γράφημα G υπογράφημα ενός γραφήματος G' αν το G είναι ισόμορφο με κάποιο υπογράφημα του G'. Ετσι το γράφημα

$$\alpha --- \beta --- \gamma$$

(τρείς κορυφές και δύο ακμές) θεωρείται υπογράφημα του γραφήματος του Σχ. 3 παρά το ότι το σύνολο κορυφών του δεν είναι καν υποσύνολο του συνόλου των κορυφών του Σχ. 3.

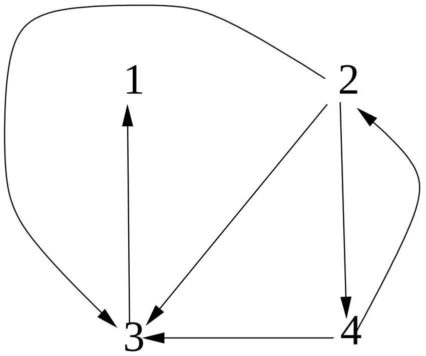
0.8 Γενικεύσεις της έννοιας του γραφήματος

Κατευθυνόμενα γραφήματα είναι ζευγάρια (V, E), όπου και πάλι V είναι ένα σύνολο κορυφών, αλλά το σύνολο E των ακμών είναι τώρα όχι ένα σύνολο διμελών υποσυνόλων του V αλλά ένα σύνολο διατεταγμένων ζευγών με στοιχεία από το V, δηλ. $E \subseteq V \times V$. Ανάλογα με την περίπτωση μπορεί κανείς να επιτρέπει ή όχι και ζευγάρια της μορφής (v, v). Το σημαντικό πάντως είναι ότι δε μπορεί πλέον κανείς να λέει ότι "i συνδέεται με το j" αλλά πρέπει να προσδιορίζει και την κατεύθυνση της σύνδεσης.

Γραφήματα με πολλαπλές ακμές είναι αυτά (κατευθυνόμενα ή μη) στα οποία μια ακμή μπορεί να μην υπάρχει καθόλου, να υπάρχει μια φορά, δυο φορές, κλπ. Ο αριθμός των φορών που εμφανίζεται μια ακμή λέγεται πολλαπλότητα της ακμής.

Γραφήματα με αυτοσυνδέσεις είναι αυτά στα οποία επιτρέπουμε μια κορυφή να συνδέεται με τον εαυτό της.

Γραφήματα με βάρη/κόστη είναι αυτά (κατευθυνόμενα ή μη) στα οποία κάθε ακμή έχει και ένα βάρος/κόστος. Αυτά είναι συνήθως μη αρνητικοί αριθμοί, αλλά αυτό δεν είναι απαραίτητο και εξαρτάται από την εφαρμογή. Για παράδειγμα, αν οι κορυφές παριστάνουν πόλεις σε μία χώρα και οι ακμές κάποιους δρόμους που τις συνδέουν, τα βάρη μπορούν να παριστάνουν τα μήκη των δρόμων.



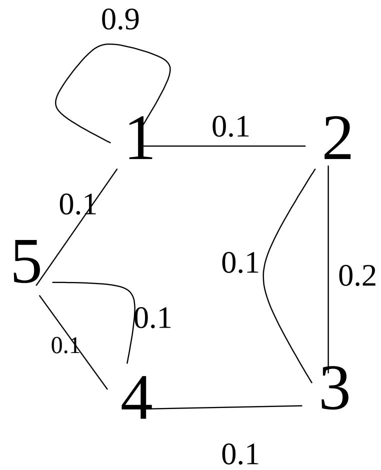


Figure 5: Μη απλά γραφήματα.

Στο Σχ. 5 δείχνουμε δύο γραφήματα. Το αριστερό είναι ένα κατευθυνόμενο γράφημα, και το δεξί είναι ένα γράφημα με πολλαπλές ακμές, αυτοσυνδέσεις και βάρη. Είναι φανερό ότι μπορούν να υπάρξουν διάφοροι τέτοιοι συνδυασμοί.

Ειδικά για τα γραφήματα με μη αρνητικά βάρη υπάρχει μια επιπλέον έννοια της απόστασης ανάμεσα σε δύο κορυφές που λαμβάνει υπόψην της τα "μήκη" (ή βάρη) των ακμών. Ετσι, το μήκος ενός μονοπατιού σε ένα γράφημα με βάρη είναι απλώς το άθροισμα των βαρών των ακμών που συμμετέχουν στο γράφημα, η απόσταση ανάμεσα στις κορυφές u και v ορίζεται ως το ελάχιστο μήκος μονοπατιού που συνδέει τις u και v ($+\infty$ αν δεν συνδέονται με κάποιο μονοπάτι), και η διάμετρος του γραφήματος G ορίζεται ως η μέγιστη απόσταση ανάμεσα σε δύο κόμβους του G, όπως και πριν.

Ασκηση 3 Δείξτε ότι η τριγωνική ανισότητα (1) εξακολουθεί να ισχύει και για τη νέα έννοια απόστασης.

0.9 Μερικά ειδικά γραφήματα

Το κενό γράφημα με n κορυφές έχει σύνολο κορυφών $[n] = \{1, \ldots, n\}$ και σύνολο ακμών $E = \emptyset$. Το συμβολίζουμε με E_n.

Το πλήρες γράφημα με n κορυφές έχει σύνολο κορυφών $[n]$ και όλες τις δυνατές ακμές, δηλ. $E =$ όλα τα διμελή υποσύνολα του $[n]$. Συμβολίζεται με K_n και έχει $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ ακμές. Το αριστερό γράφημα στο Σχ. 4 είναι το K_5.

Το πλήρες διμερές γράφημα με m και n κορυφές έχει σύνολο κορυφών το $V = A \cup B$, με $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$, $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$, και $a_i \sim b_j$, για κάθε $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. Συμβολίζεται με $K_{m,n}$ και έχει $m \cdot n$ ακμές.

Ο κύκλος με n κορυφές έχει σύνολο κορυφών το $[n]$ και $i \sim j$ αν και μόνο αν $|i - j| = 1$ ή $\{i, j\} = \{1, n\}$. Συμβολίζεται με C_n και έχει n ακμές.

§1. Δέντρα

1.1 Δέντρα, δάση και "σπάσιμο των κύκλων".

Ενα συνεκτικό γράφημα που δεν περιέχει κύκλους ονομάζεται δέντρο.

Ενα γράφημα, συνεκτικό ή μη, που δεν περιέχει κύκλους ονομάζεται δάσος.

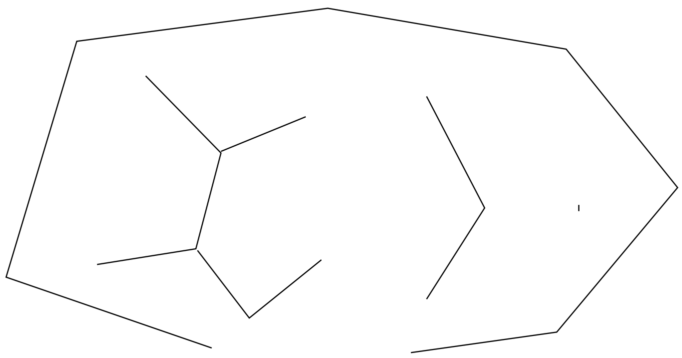


Figure 6: Ενα δάσος από 4 δέντρα

Η δεύτερη ονομασία είναι συμβατή με την πρώτη αφού κάθε τέτοιο γράφημα μπορεί να το δει κανείς σαν το σύνολο των συνεκτικών συνιστωσών του. Αλλά κάθε τέτοια συνεκτική συνιστώσα εξακολουθεί να μην περιέχει κύκλους (αφού είναι υπογράφημα του αρχικού), άρα είναι ένα δέντρο, δηλ. κάθε γράφημα χωρίς κύκλους είναι μια "ξένη" (δηλ. χωρίς μεταξύ τους συνδέσεις) ένωση από δέντρα.

Τα δέντρα έχουν ενδιαφέρον επειδή, κατά κάποια έννοια, είναι τα "ελάχιστα" συνεκτικά γραφήματα: κάθε συνεκτικό γράφημα $G = (V, E)$ περιέχει ένα υπογράφημα με τις ίδιες κορυφές, συνεκτικό και χωρίς κύκλους (άρα δέντρο). Ας δούμε γιατί ισχύει αυτό.

Εστω ότι το συνεκτικό γράφημα $G = (V, E)$ περιέχει κάποιο κύκλο

$$C: \ u_1 \xrightarrow{e_1} u_2 \xrightarrow{e_2} \cdots \xrightarrow{e_{n-1}} u_n = u_1.$$

Ας επιλέξουμε τυχαία μια από τις ακμές του κύκλου, π.χ. την e_1, και ας τη σβήσουμε από το γράφημα. Ισχυριζόμαστε ότι το γράφημα παραμένει συνεκτικό. Πραγματικά, ας υποθέσουμε πως η ακμή e_1 που σβήσαμε συμμετείχε στο γράφημα G σε κάποιο μονοπάτι P που συνέδεε δύο κορυφές v και u, όπως φαίνεται στο Σχ. 7.

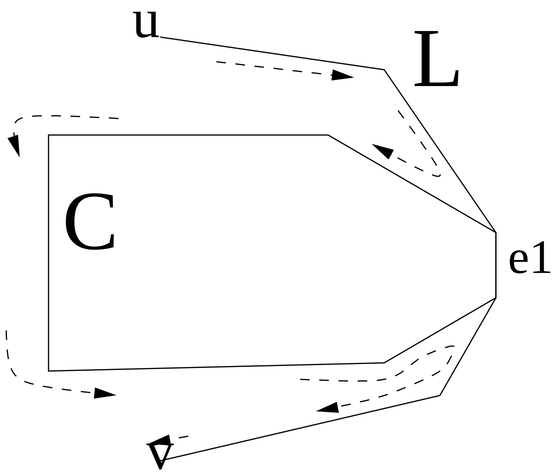


Figure 7: Διαγραφή της e_1 διατηρεί τη συνεκτικότητα.

Είναι φανερό ότι, παρά το ότι τώρα πια η ακμή e_1 έχει διαγραφεί, μπορούμε και πάλι να πάμε από το v στο u διανύοντας το μονοπάτι όπως και πριν αλλά όταν θα χρειαστεί να περάσουμε την e_1 μπορούμε να την αντικαταστήσουμε διαγράφοντας το υπόλοιπο του κύκλου C.

Την πράξη αυτή, που μόλις δείξαμε ότι διατηρεί τη συνεκτικότητα, την ονομάζουμε "σπάσιμου του κύκλου C στην ακμή e_1". Επαναλαμβάνοντας αυτή την πράξη όσο εξακολουθούν να υπάρχουν κύκλοι στο γράφημα, και αφού μετά από κάθε τέτοια πράξη οι ακμές λιγοστεύουν κατά μία, είναι φανερό (μιλάμε φυσικά για πεπερασμένα γραφήματα) ότι θα φτάσουμε σε ένα υπογράφημα του G με τις ίδιες κορυφές (αυτές δεν αλλάζουν με την πράξη), συνεκτικό και χωρίς πλέον κύκλους, δηλ. σε ένα δέντρο.

Ενα δέντρο T υπογράφημα του G και με τις ίδιες κορυφές λέγεται δέντρο που παράγει. Εχουμε δείξει λοιπόν ότι κάθε συνεκτικό γράφημα έχει δέντρο που παράγει.

1.2 Πλήθος ακμών

Θεώρημα 1 Κάθε δέντρο με n κορυφές έχει ακριβώς $n-1$ ακμές.

Απόδειξη: Με επαγωγή ως πρός n. Για $n = 1$ είναι προφανές. Εστω G δέντρο με n κορυφές.

Ισχυρισμός: Υπάρχει κορυφή του G με βαθμό 1.
Εστω ότι όλες οι κορυφές έχουν βαθμό ≥ 2 (αφού καμία δεν έχει βαθμό 0 λόγω συνεκτικότητας). Μπορούμε τότε να βρούμε μονοπάτια οσουδήποτε μεγάλου μήκους στο G στα οποία ποτέ δεν εμφανίζεται κάτι της μορφής

$$\cdots u \xrightarrow{e} v \xrightarrow{e} u \cdots$$

αφού πάντα μπορούμε να φύγουμε από κάποια κορυφή χρησιμοποιώντας κάποια άλλη ακμή από αυτή που χρησιμοποιήσαμε για να μπούμε, και μπορούμε να κινούμαστε έτσι επ'άπειρον. Αν το μονοπάτι έχει αρκετά μεγάλο μήκος θα υπάρχει σίγουρα κάποια κορυφή που εμφανίζεται εκεί πάνω από μία φορά. Επιλέγουμε μια τέτοια κορυφή u που έχει επιπλέον την ιδιότητα ότι η απόσταση ανάμεσα στις δύο εμφανίσεις της είναι ελάχιστη. Η κατάσταση απεικονίζεται στο Σχ. 8. Η επιπλέον ιδιότητα αυτή της u συνεπάγεται ότι στο κύκλωμα που απεικονίζεται στο σχήμα πάνω από το u δεν υπάρχει άλλη επαναλαμβανόμενη κορυφή ή ακμή, άρα αυτό το κύκλωμα είναι κύκλος, πράγμα που απαγορεύεται σε δέντρο, και έχουμε αποδείξει τον ισχυρισμό.

Εστω λοιπόν $\deg u = 1$ και ορίζουμε το υπογράφημα G' του G που επάγεται από τις υπόλοιπες κορυφές $V \setminus \{u\}$ (σβήνουμε δηλ. την u και τη μοναδική ακμή που καταλήγει στην u). Ως υπογράφημα, το G' προφανώς δεν έχει κύκλους και εξακολουθεί να είναι συνεκτικό αφού είναι φανερό ότι, επειδή η u έχει βαθμό 1, δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη σύνδεση δύο άλλων κορυφών. Αλλά το G' έχει $n-1$ κορυφές και από την επαγωγική μας υπόθεση έχει συνεπώς $n-2$ ακμές. Αρα το G έχει $n-1$ (αυτές του G' συν αυτή που καταλήγει στην u).
■

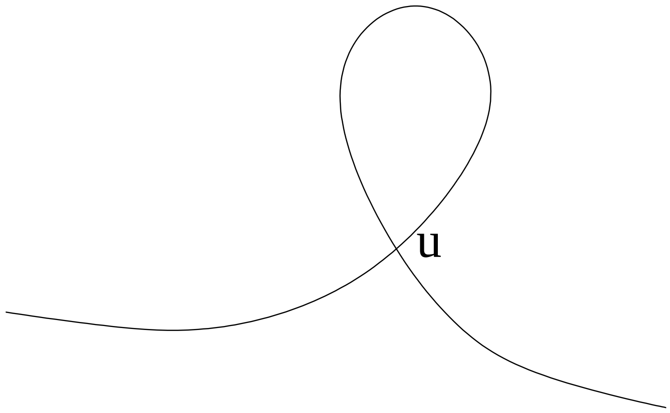


Figure 8: Ενα μονοπάτι με μια επαναλαμβανόμενη κορυφή

Ασκηση 4 Αποδείξτε ότι ένα δάσος με n κορυφές και m συνεκτικές συνιστώσες (m δέντρα δηλαδή) έχει ακριβώς $n-m$ ακμές.

Εύκολα έχουμε τώρα:

Πόρισμα 1 Αν ένα συνεκτικό γράφημα G με n κορυφές έχει $n-1$ ακμές τότε είναι δέντρο.

Απόδειξη: Το G περιέχει κάποιο δέντρο που παράγει, έστω T, το οποίο έχει $n-1$ ακμές σύμφωνα με το Θεώρημα 1. Αρα $G = T$.
■

1.3 Ελάχιστα δέντρα που παράγουν σε γραφήματα με βάρη

Εστω $G = (V, E)$ ένα συνεκτικό γράφημα με μη αρνητικά βάρη στις ακμές του

$$w : E \to \mathbb{R}^+.$$

Μας ενδιαφέρει να επιλέξουμε εκείνο το δέντρο T από όλα τα δυνατά δέντρα που παράγουν που το βάρος του, δηλ. το άθροισμα των ακμών που συμμετέχουν στο δέντρο να είναι όσο γίνεται πιο μικρό. Θέλουμε δηλ. να ελαχιστοποιήσουμε την ποσότητα

$$w(T) = \sum_{e \in T} w(e),$$

όπου το άθροισμα παίρνεται πάνω απ'όλες τις ακμές που εμφανίζονται στο δέντρο, και το T είναι ένα δέντρο που παράγει. Αν και η ποσότητα $w(T)$ έχει μοναδικό ελάχιστο, αυτό μπορεί να "πιάνεται" για παραπάνω από ένα δέντρα που παράγουν. Ολα αυτά τα δέντρα με ελάχιστο βάρος τα ονομάζουμε <u>ελάχιστα δέντρα</u>.

Μπορεί κανείς σχετικά εύκολα να δείξει ότι ο παρακάτω αλγόριθμος όντως βρίσκει ένα ελάχιστο δέντρο που παράγει στο G.

Αλγόριθμος για εύρεση ελάχιστου δέντρου

1. $S = \emptyset$
2. Εστω $G_S = (V, S)$.
3. Αν το G_S είναι συνεκτικό, ΤΕΛΟΣ. Αλλιώς:
4. Εστω e μια ελάχιστη ακμή που ενώνει δύο διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του G_S.
5. Προσθέτουμε την e στο S
6. Πήγαινε στο 2

Ο αλγόριθμος αυτός ξεκινά από ένα σύνολο ακμών S που είναι αρχικά κενό και το μεγαλώνει μέχρι που το S να γίνει το σύνολο ακμών ενός δέντρου που παράγει το G. Σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου η ακμή e επιλέγεται να είναι εκείνη η ακμή που συνδέει δυο διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες η οποία έχει ελάχιστο βάρος. Μετά την πρόσθεση της e στο S ο αριθμός των συνεκτικών συνιστωσών μειώνεται ακριβώς κατά 1 και έτσι είναι φανερό ότι ακριβώς μετά $n-1$ βήματα ο αλγόριθμος σταματά και το G_S είναι ένα δέντρο που παράγει. Το ότι το G_S είναι και ελάχιστο θέλει απόδειξη (δείτε π.χ. [1, σ. 164]). Ο αλγόριθμος αυτός ανήκει σ'εκείνη την κατηγορία αλγορίθμων που ονομάζονται "μυωπικοί" (greedy) μια και προσπαθούν να πετύχουν μια συνολική βελτιστοποίηση (στην περίπτωση μας την εύρεση ενός ελάχιστου δέντρου) βελτιστοποιώντας, κατά τη διάρκεια της εκτέλεσης τους, κάθε επιλογή που έχουν να κάνουν με κάποια κριτήρια "της στιγμής". Τέτοιοι αλγόριθμοι σπανίως βελτιστοποιούν το συνολικό πρόβλημα, και αυτός ο αλγόριθμος για ελάχιστα δέντρα είναι μια από τις εξαιρέσεις που αποδεδειγμένα επιτυγχάνεται συνολική βελτιστοποίηση.

§2. Εύρεση αποστάσεων πάνω σε γραφήματα

2.1 Ο αλγόριθμος Floyd-Warshall

Εδώ θα περιγράψουμε ένα αλγόριθμο που βρίσκει όλες τις αποστάσεις ανάμεσα σε κάθε ζευγάρι κορυφών, σε ένα γράφημα G με (μη αρνητικά) βάρη στις ακμές του. Θεωρούμε, ως συνήθως, το σύνολο κορυφών του γραφήματος να είναι το $[n]$ και γράφουμε $w(i,j)$ για το βάρος της ακμής (i,j) (το οποίο συμφωνούμε να θεωρούμε $+\infty$ αν η ακμή αυτή δεν υπάρχει).

Αλγόριθμος Floyd-Warshall

1. Θέτουμε $A_{ij}^{(0)} = w(i,j)$, για $i,j = 1,\ldots,n$.
2. Επαναλαμβάνουμε για $k = 1,2,\ldots,n$ το παρακάτω βήμα.
3. $A_{ij}^{(k)} = \min\left\{A_{ij}^{(k-1)}, A_{ik}^{(k-1)} + A_{kj}^{(k-1)}\right\}$, για $i,j = 1,\ldots,n$.

Ισχυριζόμαστε ότι στο τέλος του αλγορίθμου η απόσταση ανάμεσα στις κορυφές i και j είναι ίση με $A_{ij}^{(n)}$.

Απόδειξη: Θα δείξουμε με επαγωγή ως προς το k ότι $A_{ij}^{(k)}$ ισούται με $L_{ij}^{(k)}$ = το μήκος του ελάχιστου μονοπατιού από το i στο j το οποίο όμως χρησιμοποιεί ενδιάμεσες κορυφές μόνο από το σύνολο $\{1,\ldots,k\}$.

Για $k=0$ το παραπάνω σύνολο είναι κενό και ο ισχυρισμός σημαίνει ότι $A_{ij}^{(0)}$ ισούται με το βάρος της πλευράς (i,j) μια και το σύνολο των μονοπατιών από το i στο j που <u>δεν</u> χρησιμοποιούν καμία ενδιάμεση κορυφή αποτελείται από τη ακμή (i,j) και μόνο. Αρα ο ισχυρισμός είναι αληθής για $k=0$.

Υποθέτουμε τώρα ότι ο ισχυρισμός ισχύει μέχρι και για $k-1$, θεωρούμε ένα ελάχιστο μονοπάτι από το i στο j που χρησιμοποιεί ενδιάμεσες κορυφές μόνο από το σύνολο $\{1,\ldots,k\}$, και ξεχωρίζουμε δύο περιπτώσεις.
(α) Το ελάχιστο αυτό μονοπάτι <u>δεν</u> χρησιμοποιεί την κορυφή k.
(β) Χρησιμοποιεί την κορυφή k.

Στην πρώτη περίπτωση έχουμε φυσικά $L_{ij}^{(k)} = L_{ij}^{(k-1)}$.

Εστω ότι ισχύει το (β). Μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι όποιο και να είναι το ελάχιστο μονοπάτι από το i στο j περιέχει το k ακριβώς μια φορά (αν το περιέχει δυο ή παραπάνω μπορούμε να το μικράνουμε το μονοπάτι παραλείποντας ένα κομμάτι ανάμεσα σε δύο εμφανίσεις του k). Επίσης, το κομμάτι του μονοπατιού από το i στο k είναι ένα ελάχιστο μονοπάτι από το i στο k που χρησιμοποιεί ενδιάμεσες κορυφές από το σύνολο $\{1,\ldots,k-1\}$. Αρα το μήκος του είναι $L_{ik}^{(k-1)}$ και, ομοίως, το μήκος του μονοπατιού από το k στο j είναι $L_{kj}^{(k-1)}$. Το συνολικό μήκος του μονοπατιού είναι λοιπόν σ'αυτή την περίπτωση

$$L_{ij}^{(k)} = L_{ik}^{(k-1)} + L_{kj}^{(k-1)}.$$

Επίσης, σε κάθε περίπτωση, έχουμε τις ανισότητες

$$L_{ij}^{(k)} \le L_{ij}^{(k-1)} \quad \text{και} \quad L_{ij}^{(k)} \le L_{ik}^{(k-1)} + L_{kj}^{(k-1)},$$

η πρώτη από τον ορισμό του του συμβόλου L και μόνο και η δεύτερη παρατηρώντας ότι μπορούμε να πάμε από το i στο j (με ενδιάμεσους από το $[k]$) ακολουθώντας πρώτα ένα ελάχιστο μονοπάτι από το i στο k και μετά ένα ελάχιστο μονοπάτι από το k στο j (με ενδιάμεσους από το $[k-1]$).

Από τα παρπάνω προκύπτει ότι

$$L_{ij}^{(k)} = \min\left\{L_{ij}^{(k-1)}, L_{ik}^{(k-1)} + L_{kj}^{(k-1)}\right\}$$

και άρα, από τον τρόπο υπολογισμού των πινάκων $A^{(k)}$, έχουμε $A(k)_{ij} = L_{ij}^{(k)}$, για κάθε $i, j = 1, \ldots, n$, $k = 0, \ldots, n$.

■

Μπορεί κανείς εύκολα να δεί ότι ο αλγόριθμος Floyd-Warshall που περιγράψαμε παίρνει περίπου n^3 υπολογιστικά βήματα για να τελειώσει.

§3. Μονοπάτια και κυκλώματα Euler και Hamilton

3.1 Γενικά

<u>Μονοπάτι Euler</u> (αντ. κύκλωμα Euler) ονομάζεται ένα μονοπάτι (αντ. κύκλωμα) που περνάει ακριβώς μία φορά από κάθε <u>ακμή</u> του γραφήματος.

<u>Μονοπάτι Hamilton</u> (αντ. κύκλωμα Hamilton) ονομάζεται ένα μονοπάτι (αντ. κύκλωμα) που περνάει ακριβώς μία φορά από κάθε <u>κορυφή</u> του γραφήματος.

Δεν έχει κάθε γράφημα G κύκλωμα ή μονοπάτι Euler ή Hamilton. Εν γένει είναι πολύ δύσκολο να δώσει κανείς χρήσιμες αναγκαίες και ικανές συνθήκες για την ύπαρξη μονοπατιού ή κυκλώματος Hamilton. Επίσης από υπολογιστική άποψη η εύρεση μονοπατιού ή κυκλώματος Hamilton είναι ένα πολύ δύσκολο πρόβλημα. Ανήκει στην κλάση των λεγομένων NP-πλήρων προβλημάτων για τα οποία πιστεύται ότι δεν επιδέχονται λύση σε πολυωνυμικό χρόνο. Για το συγκεκριμένο πρόβλημα, της ύπαρξης ή όχι μονοπατιού Hamilton σε ένα γράφημα G με n κορυφές πιστεύεται ισχυρά ότι δεν υπάρχει αλγόριθμος που, παίρνοντας σαν είσοδο το τυχόν γράφημα G, μας απαντάει ΝΑΙ αν το γράφημα έχει μονοπάτι Hamilton και ΟΧΙ αλλιώς, και, επιπλέον ο χρόνος που παίρνει (ο αριθμός των "βημάτων") είναι φραγμένος άνω από μια συνάρτηση της μορφής n^C όπου C είναι μια, ενδεχομένως μεγάλη, σταθερά (δεν εξαρτάται δηλ. από το n).

Αλλά, παρά τις ισχυρές ενδείξεις ότι αυτό συμβαίνει, αυτό δεν έχει αποδειχθεί ακόμη. Ενα άλλο αξιοσημείωτο που αφορά τα NP-πλήρη προβλήματα είναι ότι αυτά είναι αλληλένδετα με την εξής έννοια: αν ένα από αυτά δειχθεί ότι λύνεται σε πολυωνυμικό χρόνο, τότε όλα λύνονται. Αυτό βεβαίως συνεπάγεται ότι και αν ένα από αυτά δειχθεί ότι <u>δεν</u> λύνεται σε πολυωνυμικό χρόνο τότε κανένα δε λύνεται. Επίσης, η κλάση αυτή προβλημάτων περιλαμβάνει εκατοντάδες προβλήματα τα οποία έχουν προκύψει πολύ φυσιολογικά. Δείτε για παράδειγμα [2].

3.2 Συνθήκες για κύκλωμα/μονοπάτι Euler

Η κατάσταση είναι τελείως διαφορετική για μονοπάτια και κυκλώματα Euler. Εχουμε το εξής απλό (και στη διατύπωση, και στην απόδειξη) θεώρημα.

Θεώρημα 2 (α) Ενα συνεκτικό γράφημα G έχει κύκλωμα Euler αν και μόνο αν όλες οι κορυφές του G έχουν άρτιο βαθμό.
(β) Ενα συνεκτικό γράφημα G έχει μονοπάτι Euler αν και μόνο αν όλες οι κορυφές του G έχουν άρτιο βαθμό ή όλες οι κορυφές του G εκτός από ακριβώς 2 έχουν άρτιο βαθμό.

Απόδειξη του (α): Αν το G έχει κύκλωμα Euler

$$\pi : \ v_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow v_n = v1,$$

τότε κάθε φορά που κάποια κορυφή v εμφανίζεται στο π "μπαίνουμε" στο v κινούμενοι πάνω στο π και μετά "βγαίνουμε" από το v, χρησιμοποιώντας έτσι συνολικά 2 από τις ακμές που καταλήγουν στο v, οι οποίες δεν πρόκειται να ξαναχρησιμοποιηθούν, αφού το π περνάει από κάθε ακμή ακριβώς μια φορά. Με τον τρόπο αυτό (δηλ. σε ζεύγη πάντα) χρησιμοποιούνται όλες οι ακμές του v, άρα το v έχει άρτιο βαθμό.

Αντίστροφα τώρα, έστω ότι όλες οι κορυφές του G έχουν άρτιο βαθμό. Επιλέγουμε μια οποιαδήποτε κορυφή v_1 ως πρώτη κορυφή του κυκλώματος Euler που θα κατασκευάσουμε. Επιλέγουμε μια τυχούσα ακμή e_1 του v και φεύγουμε μέσω αυτής από την κορυφή v_1 καταλήγοντας σε κάποια v_2. Οποτεδήποτε χρησιμοποιούμε μιαν ακμή τη σημειώνουμε ώστε να μην την ξαναχρησιμοποιήσουμε. Από την v_2 και μετά συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο, δηλ. επιλέγουμε μια οποιαδήποτε μη χρησιμοποιημένη από τις ακμές της τρέχουσας κορυφής και φεύγουμε μέσω αυτής. Κάποια στιγμή δε θα μπορούμε πλέον να το κάνουμε αυτό, δηλ. έχουμε φτάσει σε μια κορυφή v και δε μπορούμε πλέον να φύγουμε από αυτή γιατί όλες οι ακμές της έχουν ήδη χρησιμοποιηθεί. Αυτή πρέπει τότε να είναι η v_1 γιατί σε όλες τις άλλες κορυφές χρησιμοποιούμε τις ακμές τους ανά ζεύγη (μια για να μπούμε, και μια για να βγούμε) και αφού όλοι οι βαθμοί είναι άρτιοι είναι εύκολο να δει κανείς ότι οποτεδήποτε φτάσουμε σε μια κορυφή άλλη από τη v_1 πάντα έχουμε τη δυνατότητα να φύγουμε.

Αν τώρα (έχουμε ξαναγυρίσει στο v_1) το κύκλωμα που έχουμε διανύσει έχει χρησιμοποιήσει όλες τις ακμές του γραφήματος έχουμε βρει ένα κύκλωμα Euler και έχουμε τελειώσει. Αλλιως, υπάρχει αναγκαστικά μια κορυφή u πάνω στο κύκλωμα (έστω π) που έχουμε φτιάξει μια ακμή της οποίας δεν έχει χρησιμοποιηθεί (αλλιως οι κορυφές που αμφανίζονται στο π θα ήταν ασύνδετες με τις υπόλοιπες κορυφές). Ξαναξεκινούμε τώρα την ίδια διαδικασία με αρχική κορυφή την u και παράγουμε έτσι άλλο ένα κύκλωμα του οποίου όλες οι ακμές είναι ξένες από αυτές του πρώτου κυκλώματος (αλλά μπορούν αυτά τα δύο να έχουν κοινές κορυφές– αυτό δε μας ενοχλεί). Παρατηρείστε ότι, αφού το πρώτο κύκλωμα π έχει χρησιμοποιήσει άρτιο άριθμό από ακμές από κάθε κορυφή, αν βγάλουμε από το G τις ακμές του π όλες οι κορυφές εξακολουθούν να έχουν άρτιο βαθμό, άρα ισχύουν στην κατασκευή του 2ου κυκλώματος όσα ίσχυαν και στο 1ο.

Αυτά τα δύο κυκλώματα τα ενώνουμε σε ένα όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα 9.

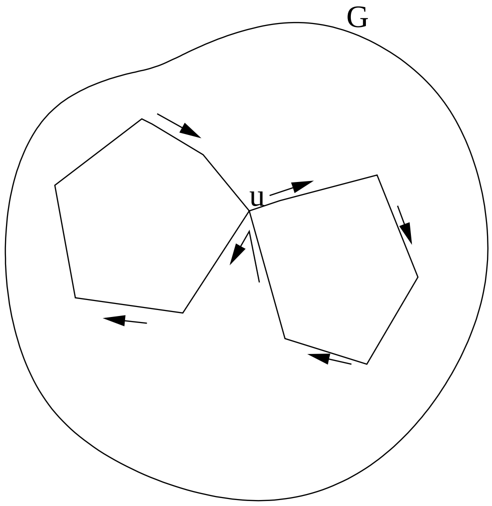


Figure 9: Πώς ενώνονται δύο κυκλώματα με κοινή κορυφή την u.

Διανύουμε δηλ. πρώτα το ένα από τα δύο ξεκινώντας από το u και μετά το άλλο και καταλήγουμε πάλι στο u.

Ετσι, ανά πάσα στιγμή στην κατασκευή έχουμε ένα κύκλωμα. Η διαδικασία αυτή τελειώνει ακριβώς τότε που όλες οι ακμές έχουν χρησιμοποιηθεί, οπότε και το κύκλωμα είναι κύκλωμα Euler.

■

Η απόδειξη του (β) είναι εντελώς παρόμοια και αφήνεται ως άσκηση.

§4. Χρωματισμοί

4.1 Ορισμοί

Ενας χρωματισμός ενός συνόλου A με r χρώματα θα είναι μια συνάρτηση

$$\chi : A \to [r] = \{1, \ldots, r\}.$$

Αντί να αναφερόμαστε δηλ. στα χρώματα με άσπρο, κόκκινο, κλπ, τα αριθμούμε απλώς και προσδιορίζουμε το πόσα είναι.

Εστω $G = (V, E)$ ένα γράφημα.

Ενας χρωματισμός κορυφών του G με r χρώματα είναι μια συνάρτηση $\chi : V \to [r]$ τέτοια ώστε

$$\forall u, v \in V : \; u \sim v \Longrightarrow \chi(u) \neq \chi(v).$$

Κορυφές που ενώνονται με ακμές δηλ. πρέπει να πάρουν αναγκαστικά διαφορετικό χρώμα.

Ομοίως χρωματισμός ακμών του G με r χρώματα είναι συνάρτηση $\chi : E \to [r]$ τ.ώ.

$$\forall e, e' \in E : \quad e \sim e' \Longrightarrow \chi(e) \neq \chi(e').$$

Δηλ. ακμές που έχουν κοινή κορυφή πρέπει να πάρουν διαφορετικό χρώμα.

Προφανώς μπορούμε πάντα να χρωματίσουμε τις κορυφές ενός γραφήματος με n κορυφές χρησιμοποιώντας n χρώματα, ένα για κάθε κορυφή. Το ζητούμενο είναι αν μπορούμε να κάνουμε το ίδιο με λίγα χρώματα.

Ο χρωματικός αριθμός $\chi(G)$ ενός γραφήματος είναι ο ελάχιστος φυσικός r για τον οποίο υπάρχει ένας χρωματισμός κορυφών του G.

Για παράδειγμα, το πλήρες γράφημα με n κορυφές χρειάζεται n χρώματα ($\chi(K_n) = n$), ενώ το κενό γράφημα χρειάζεται ένα μόνο ($\chi(E_n) = 1$).

Ασκηση 5 Δείξτε ότι $\chi(C_n) = 2$ αν n άρτιος και 3 αν n περιττός.

4.2 Εκτιμήσεις για το χρωματικό αριθμό

Θα δώσουμε ένα άνω φράγμα για το $\chi(G)$ σε σχέση με το μέγιστο βαθμό των κορυφών του και ένα κάτω φράγμα σε σχέση με το πόσο μεγάλα πλήρη υπογραφήματα έχει. Αρχίζουμε με το κάτω φράγμα που είναι προφανές.

Θεώρημα 3 Αν το G έχει ένα υπογράφημα ισομορφικό με το K_s τότε $\chi(G) \geq s$.

Αν δηλ. το G έχει s κορυφές που όλες συνδέονται μεταξύ τους τότε χρειαζόμαστε τουλάχιστον s χρώματα για να χρωματίσουμε τις κορυφές του G, που είναι φανερό.

Το άνω φράγμα είναι πιο ενδιαφέρον.

Θεώρημα 4 Αν όλες οι κορυφές του G έχουν βαθμό $\leq d$ τότε $\chi(G) \leq d + 1$.

Απόδειξη: Με επαγωγή ως προς το πλήθος κορυφών n του G. Για $n = 1$ είναι φανερό.

Εστω G ένα γράφημα με n κορυφές και μέγιστο βαθμό d και έστω u οποιαδήποτε κορυφή του G. Ορίζουμε G' να είναι το υπογράφημα του G που προκύπτει αν διαγράψουμε την κορυφή u και όλες τις ακμές της. Αυτό έχει $n - 1$ κορυφές και μέγιστο βαθμό όχι μεγαλύτερο από πριν, άρα $\leq d$. Συνεπώς, από την επαγωγική μας υπόθεση, $\chi(G') \leq d + 1$, δηλ. μπορούμε να χρωματίσουμε τις κορυφές του G' με τα χρώματα $1, 2, \ldots, d + 1$.

Εστω τώρα οι γείτονες της u στο G', $u_1, \ldots, u_k$, με $k \leq d$. Αρα υπάρχει κάποιο από τα χρώματα $1, 2, \ldots, d+1$ που δεν έχει χρησιμοποιηθεί στο χρωματισμό των $u_1, \ldots, u_k$, έστω το χρώμα c. Χρωματίζουμε τότε την κορυφή u με το χρώμα c και κρατάμε τα χρώματα των υπολοίπων κορυφών όπως στο χρωματισμό του G'. Εχουμε έτσι κατασκευάσει ένα χρωματισμό του G με $d + 1$ χρώματα.

■

§5. Το θεώρημα του Γάμου

5.1 Συστήματα Ξένων Αντιπροσώπων

Εστω X ένα πεπερασμένο ή άπειρο σύνολο και $A_1, \ldots, A_n \subseteq X$ ένα σύστημα υποσυνόλων του X. Για απλότητα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι όλα τα σύνολα είναι πεπερασμένα αν και όλες οι αποδείξεις ισχύουν και για άπειρα σύνολα.

Ορισμός: Τα στοιχεία $x_1 \in A_1, \ldots, x_n \in A_n$ ονομάζονται ένα σύστημα ξένων αντιπροσώπων (ΣΞΑ) για το σύστημα συνόλων $A_1, \ldots, A_n$ αν τα $x_1, \ldots, x_n$ είναι όλα διαφορετικά.

Το πρόβλημα που θα μας απασχολήσει είναι να βρούμε συνθήκες για την ύπαρξη ενός ΣΞΑ για ένα σύστημα συνόλων

$$\mathcal{F} = \{A_1, \ldots, A_n\}.$$

Ορισμός: Για κάθε $J \subseteq [n]$ ορίζουμε

$$A(J) = A_{\mathcal{F}}(J) = \bigcup_{j \in J} A_j.$$

Ο δείκτης $\mathcal{F}$ θα παραλείπεται όταν δεν υπάρχει πρόβλημα σύγχισης.

Είναι φανερό πως αν το σύστημα $\mathcal{F}$ έχει ένα ΣΞΑ $\{x_1, \ldots, x_n\}$ τότε έχουμε

$$\forall J \subseteq [n] : \quad |A(J)| \geq |J|. \tag{4}$$

Αυτό γιατί το σύνολο $A(J)$ περιέχει τουλάχιστον τα $x_j, j \in J$, τα οποία εξ ορισμού είναι όλα διαφορετικά.

Η συνθήκη (4) λέγεται συνθήκη του Hall και το επόμενο θεώρημα μας λέει ότι εκτός από αναγκαία είναι και ικανή για την ύπαρξη ενός ΣΞΑ για το σύστημα συνόλων $\mathcal{F}$.

Θεώρημα 5 (Το θεώρημα του Γάμου) Το σύστημα συνόλων $\mathcal{F}$ έχει ΣΞΑ αν και μόνο αν ισχύει η συνθήκη του Hall (4).

Απόδειξη: Επαγωγή ως πρός n. Για $n = 1$ το θεώρημα είναι προφανές. Υποθέτουμε πως ισχύει μέχρι και $n-1$. Εστω $\mathcal{F} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ ένα σύστημα υποσυνόλων του X που ικανοποιεί την (4). Ενα σύνολο $J \subset [n]$, $J \neq \emptyset, [n]$, λέγεται κρίσιμο αν $|A(J)| = |J|$.

Περίπτωση 1η: Δεν υπάρχει κρίσιμο σύνολο J.
Από την (4) το A_1 έχει τουλάχιστον ένα στοιχείο, έστω x_1. Θεωρούμε τώρα το σύστημα υποσυνόλων του $X \setminus \{x_1\}$

$$\mathcal{F}' = \{A'_2, \ldots, A'_n\},$$

με $A'_j = A_j \setminus \{x_1\}$, $j = 2, \ldots, n$. Εστω $J \subseteq \{2, \ldots, n\}$. Αφού το J δεν είναι κρίσιμο για το σύστημα $\mathcal{F}$ έχουμε

$$|A_{\mathcal{F}'}(J)| \geq |A_{\mathcal{F}}(J)| - 1 > |J| - 1 \geq |J|,$$

άρα η συνθήκη του Hall (4) ισχύει για το σύστημα $\mathcal{F}'$. Από την επαγωγική υπόθεση υπάρχει ένα ΣΞΑ $x_2, \ldots, x_n$ για το $\mathcal{F}'$. Είναι εύκολο τότε να δεί κανείς πως τα $x_1, x_2, \ldots, x_n$ είναι ένα ΣΞΑ για το $\mathcal{F}$.

Περίτωση 2η: Υπάρχει κάποιο κρίσιμο σύνολο.
Εστω J ένα κρίσιμο σύνολο με το ελάχιστο δυνατό μέγεθος. Για απλούστευση μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $J = \{1, \ldots, k\}$. Εχουμε τότε $|A(J)| = |J|$. Αφού η συνθήκη του Hall ισχύει για το σύστημα $\mathcal{F}$ είναι φανερό ότι θα ισχύει και για το σύστημα $A_1, \ldots, A_k$ υποσυνόλων του $A(J)$. Αφού $k < n$ συμπεραίνουμε από την επαγωγική υπόθεση πως υπάρχει ΣΞΑ $x_1, \ldots, x_k \in A(J)$ για τα $A_1, \ldots, A_k$.

Θα δείξουμε ότι υπάρχει και ένα ΣΞΑ για τα σύνολα $A_{k+1}, \ldots, A_n$ με όλους τους αντιπροσώπους $\notin A(J)$, και έτσι θα έχει ολοκληρωθεί η απόδειξη. Γι'αυτό θα δείξουμε ότι ισχύει η συνθήκη του Hall για το σύστημα $\mathcal{F}' = \left\{A'_{k+1}, \ldots, A'_n\right\}$ υποσυνόλων του $X \setminus A(J)$, με

$$A'_j = A_j \setminus A(J), \quad j = k+1, \ldots, n.$$

Εστω λοιπόν $I \subseteq \{k+1, \ldots, n\}$. Πρέπει να δείξουμε $|A_{\mathcal{F}'}(I)| \geq |I|$.

Από τη συνθήκη του Hall για το αρχικό σύστημα $\mathcal{F}$ έχουμε

$$|A_{\mathcal{F}}(I \cup J)| \geq |I \cup J| = |I| + |J|.$$

Αλλά είναι φανερό ότι επίσης έχουμε

$$A_{\mathcal{F}}(I \cup J) = A_{\mathcal{F}'}(I) \cup A_{\mathcal{F}}(J) \quad \text{(ξένη ένωση)}.$$

Επεται ότι

$$\begin{aligned} |A_{\mathcal{F}'}(I)| &= |A_{\mathcal{F}}(I \cup J)| - |A_{\mathcal{F}}(J)| \\ &= |A_{\mathcal{F}}(I \cup J)| - |J| \\ &\geq |I \cup J| - |J| \\ &= |I| + |J| - |J| \\ &= |I|, \end{aligned}$$

που είναι αυτό που θέλαμε να δείξουμε. Αρα το σύστημα $\mathcal{F}'$ έχει ΣΞΑ του οποίου η ένωση με το ΣΞΑ $\{x_1, \ldots, x_k\}$ του συστήματος $A_1, \ldots, A_k$, μας δίνει ένα ΣΞΑ για το αρχικό σύστημα $\mathcal{F}$.
∎

Ασκηση 6 Εστω $A_1, \ldots, A_n \subseteq X$ ένα σύστημα υποσυνόλων με την ιδιότητα ότι για κάθε $J \subseteq [n]$

$$|A(J)| \geq |J| - r,$$

για κάποιο σταθερό φυσικό αρθμό r. Δείξτε ότι μπορεί κανείς να διαλέξει $n - r$ από τα υποσύνολα αυτά τα οποία έχουν ΣΞΑ.

5.2 Ταιριάσματα σε διμερή γραφήματα

Εστω ένα σύστημα $A_1, \ldots, A_n$ υποσυνόλων του X. Σε αυτό αντιστοιχίζουμε, κατά μοναδικό τρόπο, το εξής διμερές γράφημα: σύνολο αριστερών κορυφών είναι οι $A_1, \ldots, A_n$ και σύνολο δεξιών κορυφών είναι το X. Ενώνουμε την αριστερή κορυφή A_i με τη δεξιά κορυφή x αν και μόνο αν $x \in A_i$. Είναι φανερό ότι σε διαφορετικά συστήματα υποσυνόλων του X αντιστοιχούν διαφορετικά διμερή γραφήματα κατασκευασμένα κατά αυτόν τον τρόπο και είναι επίσης φανερό πώς να κατασκευάσουμε ένα σύστημα υποσυνόλων όταν μας δώσουν ένα διμερές γράφημα. Η έννοια του ΣΞΑ μεταφράζεται λοιπόν στη γλώσσα των διμερών γραφημάτων ως εξής.

Ορισμός: Ενα ταίριασμα (από αριστερά προς τα δεξιά) ενός διμερούς γραφήματος $G = (A \cup B, E)$ (με σύνολο αριστερών κορυφών το A και σύνολο δεξιών κορυφών το B) είναι μία 1-1 απεικόνιση $f : A \to B$ τέτοια ώστε για κάθε $a \in A$: $a \sim f(a)$.

Δεν έχουν όλα τα διμερή γραφήματα κάποιο ταίριασμα. Π.χ. το γράφημα του Σχ. 3 δεν έχει κανένα για προφανείς λόγους. Επίσης κάθε διμερές γράφημα με λιγότερες δεξιές κορυφές απ'ότι αριστερές δε μπορεί φυσικά να έχει ταίριασμα (από αριστερά προς τα δεξιά). Με λίγη σκέψη μπορούμε να πειστούμε ότι ένα διμερές γράφημα έχει ταίριασμα αν και μόνο αν το αντίστοιχο (με την έννοια που ορίσαμε παραπάνω) σύστημα υποσυνόλων των δεξιών κορυφών έχει ΣΞΑ.

Ορισμός: Σε ένα διμερές γράφημα, για κάθε σύνολο J αριστερών κορυφών, συμβολίζουμε με $A(J)$ το σύνολο όλων των δεξιών κορυφών που ενώνονται με κάποια κορυφή από το J.

Το θεώρημα του Γάμου παίρνει λοιπόν την εξής μορφή για διμερή γραφήματα:

Θεώρημα 6 Το διμερές γράφημα $G = (A \cup B, E)$ έχει ταίριασμα από το A στο B αν και μόνο αν

$$\forall J \subseteq A : \quad |A(J)| \geq |J|.$$

5.3 Ταιριάσματα σε κανονικά διμερή γραφήματα.

Μια εύκολη συνέπεια του θεωρήματος του Γάμου είναι η εξής:

Θεώρημα 7 Κάθε κανονικό διμερές γράφημα έχει ταίριασμα.

Απόδειξη: Εστω ότι το $G = (A \cup B, E)$ είναι r-κανονικό, $r \geq 1$. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει η υπόθεση του Θεωρήματος 6. Εστω $J \subseteq A$ και E_1 το σύνολο των ακμών που ξεκινούν από κάποια κορυφή του J. Επειδή το G είναι r-κανονικό έχουμε ότι $|E_1| = r|J|$.

Εστω επίσης E_2 το σύνολο των ακμών που καταλήγουν σε κάποια από τις κορυφές του $A(J)$, δηλ. σε κάποιο από τους γείτονες του J. Ξανά έχουμε $|E_2| = r|A(J)|$.

Αλλά προφανώς ισχύει $E_1 \subseteq E_2$. Αρα $r|J| \leq r|A(J)|$, το οποίο συνεπάγεται

$$|A(J)| \geq |J|.$$

■

§6. Βιβλιογραφία

[1] P.J. Cameron, *Combinatorics: topics, techniques, algorithms*, Cambridge Univ. Press, 1994.

[2] M.R. Garey and D.S. Johnson, *Computers and intractability. A guide to the theory of NP-completeness.* W. H. Freeman and Co., San Francisco, Calif., 1979.