Το θεώρημα του Γάμου

17 Μαρτίου, 1998

Συμβολισμοί: Με $[n]$ συμβολίζουμε το σύνολο $\{1,\ldots,n\}$. Με $|K|$ συμβολίζουμε το πλήθος των στοιχείων του συνόλου K.

Εστω X ένα πεπερασμένο ή άπειρο σύνολο και $A_1,\ldots,A_n \subseteq X$ ένα σύστημα υποσυνόλων του X. Για απλότητα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι όλα τα σύνολα είναι πεπερασμένα αν και όλες οι αποδείξεις ισχύουν και για άπειρα σύνολα.

Ορισμός: Τα στοιχεία $x_1 \in A_1,\ldots,x_n \in A_n$ ονομάζονται ένα σύστημα ξένων αντιπροσώπων (ΣΞΑ) για το σύστημα συνόλων $A_1,\ldots,A_n$ αν τα $x_1,\ldots,x_n$ είναι όλα διαφορετικά.

Το πρόβλημα που θα μας απασχολήσει είναι να βρούμε συνθήκες για την ύπαρξη ενός ΣΞΑ για ένα σύστημα συνόλων

$$\mathcal{F} = \{A_1,\ldots,A_n\}.$$

Ορισμός: Για κάθε $J \subseteq [n]$ ορίζουμε

$$A(J) = A_{\mathcal{F}}(J) = \bigcup_{j\in J} A_j.$$

Ο δείκτης $\mathcal{F}$ θα παραλείπεται όταν δεν υπάρχει πρόβλημα σύγχισης.

Είναι φανερό πως αν το σύστημα $\mathcal{F}$ έχει ένα ΣΞΑ $\{x_1,\ldots,x_n\}$ τότε έχουμε

$$\forall J \subseteq [n]: \quad |A(J)| \geq |J|. \tag{1}$$

Αυτό γιατί το σύνολο $A(J)$ περιέχει τουλάχιστον τα $x_j, j \in J$, τα οποία εξ ορισμού είναι όλα διαφορετικά.

Η συνθήκη (1) λέγεται συνθήκη του Hall και το επόμενο θεώρημα μας λέει ότι εκτός από αναγκαία είναι και ικανή για την ύπαρξη ενός ΣΞΑ για το σύστημα συνόλων $\mathcal{F}$.

Το θεώρημα του Γάμου: Το σύστημα συνόλων $\mathcal{F}$ έχει ΣΞΑ αν και μόνο αν ισχύει η συνθήκη του Hall (1).

Απόδειξη. Επαγωγή ως πρός n. Για $n = 1$ το θεώρημα είναι προφανές. Υποθέτουμε πως ισχύει μέχρι και $n-1$. Εστω $\mathcal{F} = \{A_1,\ldots,A_n\}$ ένα σύστημα υποσυνόλων του X που ικανοποιεί την (1). Ενα σύνολο $J \subset [n]$, $J \neq \emptyset, [n]$, λέγεται κρίσιμο αν $|A(J)| = |J|$.

Περίπτωση 1η: Δεν υπάρχει κρίσιμο σύνολο J. Από την (1) το A_1 έχει τουλάχιστον ένα στοιχείο, έστω x_1. Θεωρούμε τώρα το σύστημα υποσυνόλων του $X \setminus \{x_1\}$

$$\mathcal{F}' = \{A'_2,\ldots,A'_n\},$$

με $A'_j = A_j \setminus \{x_1\}$, $j = 2,\ldots,n$. Εστω $J \subseteq \{2,\ldots,n\}$. Αφού το J δεν είναι κρίσιμο για το σύστημα $\mathcal{F}$ έχουμε

$$|A_{\mathcal{F}'}(J)| \geq |A_{\mathcal{F}}(J)| - 1 > |J| - 1 \geq |J|,$$

άρα η συνθήκη του Hall (1) ισχύει για το σύστημα $\mathcal{F}'$. Από την επαγωγική υπόθεση υπάρχει ένα ΣΞΑ $x_2,\ldots,x_n$ για το $\mathcal{F}'$. Είναι εύκολο τότε να δεί κανείς πως τα $x_1,x_2,\ldots,x_n$ είναι ένα ΣΞΑ για το $\mathcal{F}$.

Περίτωση 2η: Υπάρχει κάποιο κρίσιμο σύνολο. Εστω J ένα κρίσιμο σύνολο με το ελάχιστο δυνατό μέγεθος. Για απλούστευση μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $J = \{1,\ldots,k\}$. Εχουμε τότε $|A(J)| = |J|$. Αφού η συνθήκη του Hall ισχύει για το σύστημα $\mathcal{F}$ είναι φανερό ότι θα ισχύει και για το σύστημα $A_1,\ldots,A_k$ υποσυνόλων του $A(J)$. Αφού $k < n$ συμπεραίνουμε από την επαγωγική υπόθεση πως υπάρχει ΣΞΑ $x_1,\ldots,x_k \in A(J)$ για τα $A_1,\ldots,A_k$.

Θα δείξουμε ότι υπάρχει και ένα ΣΞΑ για τα σύνολα $A_{k+1},\ldots,A_n$ με όλους τους αντιπροσώπους $\notin A(J)$, και έτσι θα έχει ολοκληρωθεί η απόδειξη. Γι'αυτό θα δείξουμε ότι ισχύει η συνθήκη του Hall για το σύστημα $\mathcal{F}' = \left\{A'_{k+1},\ldots,A'_n\right\}$ υποσυνόλων του $X \setminus A(J)$, με

$$A'_j = A_j \setminus A(J), \quad j = k+1,\ldots,n.$$

Εστω λοιπόν $I \subseteq \{k+1,\ldots,n\}$. Πρέπει να δείξουμε $|A_{\mathcal{F}'}(I)| \geq |I|$.

Από τη συνθήκη του Hall για το αρχικό σύστημα $\mathcal{F}$ έχουμε

$$|A_{\mathcal{F}}(I\cup J)| \geq |I \cup J| = |I| + |J|.$$

Αλλά είναι φανερό ότι επίσης έχουμε

$$A_{\mathcal{F}}(I\cup J) = A_{\mathcal{F}'}(I) \cup A_{\mathcal{F}}(J) \quad \text{(ξένη ένωση)}.$$

Επεται ότι

$$\begin{aligned} |A_{\mathcal{F}'}(I)| &= |A_{\mathcal{F}}(I\cup J)| - |A_{\mathcal{F}}(J)| \\ &= |A_{\mathcal{F}}(I\cup J)| - |J| \\ &\geq |I\cup J| - |J| \\ &= |I| + |J| - |J| \\ &= |I|, \end{aligned}$$

που είναι αυτό που θέλαμε να δείξουμε. Αρα το σύστημα $\mathcal{F}'$ έχει ΣΞΑ του οποίου η ένωση με το ΣΞΑ $\{x_1,\ldots,x_k\}$ του συστήματος $A_1,\ldots,A_k$, μας δίνει ένα ΣΞΑ για το αρχικό σύστημα $\mathcal{F}$.

■