Πανεπ. Κρητης, Τμημα Μαθηματικων, Πραγματικη Αναλυση, Ανοιξη 2009-10, Μιχ. Κολουντζακης

8ο φυλλάδιο προβλημάτων, 21 Απρ. 2010

Πρόβλημα 1. Έστω $A \in \mathcal{L}_d$ και Lebesgue μετρήσιμη $f : A \to [0, +\infty]$. Γνωρίζουμε ότι ισχύει $\int_A f \geq 0$. Αποδείξτε ότι, αν $\int_A f = 0$, τότε $f = 0$ L-σχεδόν παντού στο A.

(Υπόδειξη: Έστω, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το $E_n = \{x \in A : f(x) \geq \frac{1}{n}\}$. Παρατηρήστε ότι $E_n \in \mathcal{L}_d$ και $\frac{1}{n}\chi_{E_n} \leq f$ στο A. Αποδείξτε ότι $\frac{1}{n}m_d(E_n) \leq \int_A f$ και, επομένως, ότι $m_d(E_n) = 0$. Παρατηρήστε ότι $\{x \in A : f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$.)

Πρόβλημα 2. Έστω $A \in \mathcal{L}_d$ με $m_d(A) < +\infty$. Αν η f^2 είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο A, αποδείξτε ότι και η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο A.

(Υπόδειξη: $|f| \leq \frac{1}{2}f^2 + \frac{1}{2}$.)

Πρόβλημα 3. Έστω $A \in \mathcal{L}_d$ και Lebesgue μετρήσιμη $f : A \to [0, +\infty]$.
(1) **Ανισότητα του Chebyshev.** Αποδείξτε ότι για κάθε $\lambda > 0$ ισχύει

$$m_d\big(\{x \in A : f(x) \geq \lambda\}\big) \leq \frac{1}{\lambda}\int_A f.$$

(Υπόδειξη: Αν $B = \{x \in A : f(x) \geq \lambda\}$, τότε $\lambda\chi_B \leq f$ στο A.)
(2) Αν $\int_A f < +\infty$, αποδείξτε ότι $\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda m_d\big(\{x \in A : f(x) \geq \lambda\}\big) = 0$.

Πρόβλημα 4. (1) Για ποιες τιμές του α είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη η συνάρτηση $x^{-\alpha}$ στο $(0, 1]$; στο $[1, +\infty)$; στο $(0, +\infty)$;
(2) Αποδείξτε ότι η $f(x) = \frac{d}{dx}\big(x^2 \sin \frac{1}{x^2}\big)$ δεν είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $(0, 1)$.
(3) Αν $x > 0$, αποδείξτε ότι η $f(t) = t^{x-1}e^{-t}$ είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $(0, +\infty)$.