Διάρκεια διαγωνίσματος 3 ώρες. Κλειστές όλες οι σημειώσεις.

Διαγώνισμα Σεπτεμβρίου, 10 Σεπ. 2010

Πρόβλημα 1. Πείτε (με πλήρη αιτιολόγηση) ποια από τα παρακάτω σύνολα πραγματικών αριθμών είναι αριθμήσιμα και ποια όχι: (α) άρρητοι αριθμοί, (β) $\bigcup_{n=1}^{\infty}[n, n+\frac{1}{2}]$, (γ) το τριαδικό σύνολο Cantor, (δ) $\{m^{1/n}:\ m,n=1,2,\ldots\}$.

Πρόβλημα 2. (α) Δώστε τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου ενός συνόλου στο $\mathbb{R}$.
(β) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ αριθμήσιμο σύνολο. Χρησιμοποιώντας μόνο τον ορισμό που δώσατε στο (α) αποδείξτε ότι το εξωτερικό μέτρο του A είναι 0.

Πρόβλημα 3. (α) Αν η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $(0,1)$, αποδείξτε ότι

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{(0,1)} x^n f(x)\,dx = 0.$$

(β) Δείξτε, επιλέγοντας την κατάλληλη συνάρτηση f, ότι το διάστημα $(0,1)$ στο (α) δε μπορεί να αντικατασταθεί με το διάστημα $(0,2)$.

Πρόβλημα 4. Έστω f_n μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις ορισμένες στο $\mathbb{R}$ και τέτοιες ώστε

$$\sum_n \int_{\mathbb{R}} f_n < \infty.$$

Δείξτε ότι η σειρά $\sum_n f_n(x)$ συγκλίνει σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$.

Πρόβλημα 5. Κατασκευάστε μια ακολουθία μετρησίμων συναρτήσεων $f_n : [0,1] \to [0,+\infty)$ τ.ώ. να ισχύει

$$\int_{[0,1]} f_n^2 \to \infty, \quad \int_{[0,1]} f_n \to 0.$$

Δείξτε επίσης ότι δε γίνεται να συμβαίνει το ανάποδο (ολοκλήρωμα των τετραγώνων να πηγαίνει στο 0 αλλά ολοκλήρωμα των συναρτήσεων να πηγαίνει στο ∞).